N° d'ordre 865

THESES

présentées à

l'UNIVERSITE PAUL SABATIER DE TOULOUSE (SCIENCES)

pour obtenir

le grade de DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

M. Wouafo - Kamga Jean

1ère thèse

Décomposition des G-structures d'ordre supérieur (1ère partie).

Structures transverses des feuilletages (2ème partie).

2ème thèse

Extension des théorèmes de Picard.

Soutenues le 5 avril 1979, devant la commission d'examen :

Présidente : Mlle P. Libermann

Examinateurs : Mlle C. Barbance
MM. A. Crumeyrolle
J. Grifone
P. Molino
T.V. Nguyen
J. Pradines

Rapporteurs : M. I. Kolář, Mlle P. Libermann, MM. P. Molino, J. Pradines, J. Virsik.

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

à la mémoire de mon père

Monsieur Jean Pradines m'a accueilli dans le groupe de Géométrie différentielle à Toulouse ; ce sont ses conseils sans relâche doublés d'une patience exemplaire qui m'ont permis de mener à bien ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Mademoiselle Libermann a été doublement sollicitée pour ce travail comme rapporteur et comme présidente du jury ; j'en suis très honoré et la remercie très sincèrement.

Je remercie Monsieur Molino pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et d'avoir accepté la double tâche de rapporteur et d'examinateur.

Mes remerciement vont également à Mademoiselle Barbance, Messieurs Crumeyrolle et Grifone d'avoir accepté de faire partie du jury et à Monsieur Nguyen de m'avoir en outre proposé un deuxième sujet riche d'enseignements.

Messieurs Kolář de l'Institut Mathématique de l'académie des Sciences Tchécoslovaque, et Virsik de Monash University (Melbourne) ont bien voulu analyser la première partie de ce travail ; je leur exprime toute ma gratitude.

Il n'y a pas meilleure circonstance pour remercier Monsieur Ettinger qui m'a donné la première occasion de découvrir l'U. E. R. de Mathématique de Toulouse.

La réalisation technique de ce travail a été effectuée par Mesdames Brouard et Planet pour la dac-

tylographie de la première partie, Messieurs Bouscatel et Subra pour l'impression ; qu'ils trouvent tous ici mes remerciements pour leur contribution.

Je remercie l'Université Paul Sabatier et à travers elle l'U.E.R. de M.I.G., de m'avoir offert son hospitalité et les moyens matériels de mener ce travail à son terme.

Je remercie aussi tous ceux qui m'ont aidé, sous une forme ou sous une autre, tout au long de l'élaboration de ce travail, et ils sont encore nombreux à n'avoir pas été cités ici.

Le texte lisible de la deuxième partie est sorti d'un manuscrit surchargé grâce à la persévérance de mon épouse. Je souhaite qu'elle trouve en ce travail le couronnement de sa longue patience.

AVANT - PROPOS

-:-:-:-:-:-:-:-

Le travail présenté ici comporte deux parties entièrement indépendantes.

La première partie intitulée "Décomposition des G-structures d'ordre supérieur" donne et étudie une généralisation systématique du prolongement des connexions d'ordre supérieur (introduite par Ehresmann et étudiée ici à partir des travaux de Virsik et de Kolář) dans le cadre de la théorie des F-objets introduite par Pradines.

La deuxième partie intitulée " Structures transverses des feuilletages " a pour ambition de poser les bases pour une extension de la géométrie différentielle à certains quotients de variétés englobant en particulier les Q-variétés de Barre, et les quotients de feuilletages (du point de vue de Molino).

Les deux parties ont un point commun qui réside dans la méthode essentiellement diagrammatique des démonstrations. On y gagne très largement en clarté et donc en facilité de compréhension.

Chaque partie est précédée d'une introduction très détaillée et il est plus convenable que le lecteur s'y réfère.

PREMIERE PARTIE

DECOMPOSITION DES G-STRUCTURES

D'ORDRE SUPERIEUR

TABLE DES MATIERES

Introduction

Chapitre I : Préliminaires..... 1

1 - rappels sur les catégories..... 1

a) transformations naturelles..... 1

b) composition verticale..... 2

c) composition horizontale..... 2

d) carrés cartésiens..... 5

2 - connexions d'ordre supérieur..... 8

a) connexion sur un groupoïde différentiable..... 9

b) catégorie $\mathcal{G}_B$..... 11

c) connexions principales..... 12

Chapitre II : F-objets..... 16

1 - catégorie à prolongement..... 16

a) définition..... 16

b) exemples de catégorie à prolongement..... 20

2 - F-objet d'ordre un et prolongement

a) F-objet..... 22

b) prolongements..... 25

3 - F-objets d'ordre supérieur

a) les catégories $\mathcal{C}^{(r)}$..... 33

b) image réciproque d'un F-objet..... 36

c) sous-catégorie $\mathcal{J}_o$ et F-objets canoniques..... 38

d) une caractérisation des F-connexions..... 42

Chapitre III : Composition des F-objets..... 46

1 - F-objets tronquables..... 46

2 - loi de composition sur $\psi(E)$..... 49

3 - propriétés de la loi de composition..... 51

4 - F-objets décomposables..... 58

5 - étude des F-objets semi-holonomes..... 60

Conclusion..... 67

Bibliographie..... 69

INTRODUCTION

Le présent travail est le développement d'une note [PW] publiée en collaboration avec Jean Pradines. Il contient les rappels indispensables, l'exposé de l'origine du problème et de ses motivations, le développement des principaux exemples qui sont visés par la théorie générale abstraite que l'on élabore, une présentation plus détaillée des démonstrations, et quelques compléments.

En outre, l'un des deux théorèmes fondamentaux (théorème 3) est établi ici sous des hypothèses vérifiées dans tous les exemples que nous avons en vue, alors que dans [PW] , on s'appuyait sur une hypothèse additionnelle restrictive, qui n'était pas toujours vérifiée (en particulier elle ne l'était pas dans le dernier exemple cité dans la Note, contrairement à ce qui était suggéré implicitement par le texte).

L'origine de ce travail est un article de J. Virsik [VI_2] , développant, dans le cadre des groupoïdes de Lie (c'est-à-dire des groupoïdes différentiables transitifs localement triviaux [E_6]), la théorie des connexions d'ordres supérieurs (holonomes ou non) introduite par C. Ehresmann [E_7] . Il est démontré dans cet article que le prolongement d'ordre 1 d'une telle connexion est un cas particulier d'une loi de composition partiellement définie entre connexions d'ordres supérieurs sur un même groupoïde de Lie, dont l'une est supposée du premier ordre. Ceci conduit à étudier la possibilité de décomposer une connexion d'ordre supérieur en facteurs du premier ordre ; en particulier une connexion

est dite simple si elle est décomposable en facteurs tous égaux. Il est alors prouvé notamment qu'une connexion décomposable (en facteurs du premier ordre) est simple si et seulement si elle est semi-holonome [VI_2, théorème 1] , et si et seulement si son prolongement (d'ordre un) est semi-holonome (théorème 6).

Postérieurement à cet article de Virsik, et indépendamment de la note [PW] , I. Kolář [K_4] a étendu la définition de la loi de composition de Virsik aux cas de deux connexions d'ordres quelconques et énoncé l'associativité de la loi de composition "$*$" ainsi introduite. Ce premier article reste dans le cadre des groupoïdes de Lie. Un article ultérieur du même auteur [K_5] donne la traduction dans le cadre (essentiellement équivalent, bien qu'il ne s'agisse pas d'une équivalence de catégories stricto sensu) des fibrés principaux. L'auteur fait observer que ce dernier cadre est plus favorable à l'étude de la loi "$*$", point qui trouvera une confirmation et une explication dans le présent travail, où apparaitra le fait que le bon cadre fonctoriel est, non la catégorie des morphismes de fibrés principaux, mais la catégorie des fibrés (non nécessairement principaux) où opère un groupe de Lie fixé. Cette dernière (catégorie) n'a pas de traduction simple dans le cadre de groupoïde de Lie.

Les deux articles précités font un usage systématique des jets non holonomes d'ordres élevés, qui sont d'un maniement délicat, et conduisent à des formules assez lourdes et d'une interprétation souvent difficile.

Les progrès apportés par le présent travail reposent sur l'emploi d'un formalisme très agréable introduit par J. Pradines en 1974 ([P_3] , [P_4]), qui consiste à décrire la situation par les seules données d'une

catégorie d'applications (par exemple la catégorie des fibrés vectoriels de base fixée), munie de deux sous-catégories formées d'injections et de surjections (par exemple les plongements et les surmersions), et d'un endo-foncteur F, dit de prolongement (par exemple le foncteur "1-jet de sections") qui est "conaturalisé", c'est-à-dire muni d'une transformation naturelle vers l'identité (ici la transformation "but des jets"), ces données étant assujetties à un petit nombre de conditions trivialement vérifiées dans des cas très étendus. Alors toutes les constructions se ramènent à des constructions purement algébriques d'une nature très élémentaire et très simple.

Les avantages apportés ici par ce formalisme sont multiples :

1) La théorie est rendue polyvalente, car les conditions utilisées sont vérifiées dans une foule d'exemples plus concrets dont nous développons quelques uns, tous empruntés à la géométrie différentielle ; il est d'ailleurs possible qu'il y ait d'autres interprétations intéressantes de la théorie, auxquelles nous n'avons pas songé, notamment dans d'autres domaines mathématiques.

2) L'algébrisation simplifie considérablement les notations et leur maniement : ainsi les différentes projections, considérées par Virsik, entre espaces de jets non holonomes d'ordre r + k et r, s'interprètent à l'aide des deux lois de composition classiques entre les itérés du foncteur de prolongement F et de sa transformation naturelle ; la loi de composition "$*$" se ramène à la construction d'un carré cartésien ; la propriété d'associativité de cette loi énoncée par Kolář, se ramène à des propriétés de composition des carrés cartésiens.

3) Cette simplification nous permet d'aller, sans trop d'effort,

beaucoup plus loin que les auteurs précités, d'une part en étendant ou renforçant beaucoup leurs résultats, même à l'intérieur de chaque modèle concret de la théorie ; d'autre part en obtenant des résultats entièrement nouveaux, qu'il serait sans doute très pénible d'obtenir directement, dans chaque cas particulier, à partir des constructions explicites en termes de jets non holonomes :

a) En effet on s'aperçoit qu'on peut, sans complications essentielles, remplacer dans toute la théorie, les connexions par des "F-objets" (d'ordres supérieurs) quelconques au sens de Pradines, dont les connexions sont des cas très particuliers, et qui s'interprètent, dans les exemples envisagés, comme des systèmes différentiels soumis à des conditions de régularité et d'invariance dépendant de la catégorie choisie (ce peut être par exemple, des G-structures). La composition "$*$" s'interprète alors comme un système engendré en un certain sens, par les deux systèmes dont l'un a été prolongé par des dérivations formelles.

b) On établit alors la propriété remarquable (que les auteurs précédents n'énoncent pas, même pour les connexions) selon laquelle tout objet du type précédent admet une décomposition unique en facteurs "premiers", c'est-à-dire indécomposables (autrement dit $*$ définit un monoïde libre dont les générateurs sont ces facteurs premiers).

c) Un autre fait remarquable est que le théorème de simplicité de Virsik s'étend sous une forme doublement renforcée puisque l'on considère des objets qui ne sont pas a priori des connexions, et que l'on envisage des décompositions en facteurs qui ne sont, a priori, ni du premier ordre, ni des connexions et que l'on a cependant encore, a posteriori, la propriété que tout F-objet d'ordre supérieur semi-holonome est, ou indécomposable, ou simple, c'est-à-dire est une puissance d'une connexion du premier ordre (et en particulier est une connexion).

Ce travail est divisé en trois chapitres.

Le premier chapitre contient (§ 1) des rappels d'algèbre des catégories qui, bien que très classiques, sont parfois peu familiers aux géomètres. Après avoir rappelé les deux lois de composition des transformations naturelles entre foncteurs, (§ 1,b,c), on insiste sur un cas, crucial pour la suite, des transformations naturelles entre endofoncteurs d'une catégorie. C'est un cas très particulier de catégorie double, dans lequel une des deux structures de catégorie se réduit à un monoïde (une seule unité). On rappelle également quelques propriétés de composition des carrés cartésiens (proposition 3 et corollaire) qui sont d'un usage constant dans la suite. Dans le paragraphe 2, nous rappelons les résultats de Virsik et de Kolàř sur les connexions d'ordre supérieur dans les groupoïdes (a) dans les fibrés principaux (c) , et le lien entre les deux (proposition 6). La présentation de ces derniers rappels est adaptée à notre objectif.

Le chapitre II rappelle le formalisme des foncteurs de prolongement (§ 1),des F-objets et des F-connexions (§ 1) d'ordre un (qui sont les S-objets de $[P_4]$), et de leurs prolongements (§ 2), et décrit les principaux exemples que vise la théorie. On introduit ensuite la notion de F-objets et de F-connexions d'ordre supérieur (§ 3), obtenue en remplaçant le foncteur F par un de ses itérés (grâce à la proposition 7). Pour éviter d'avoir à manipuler des F-objets définis à isomorphisme près, et des complications logiques inutiles, on postule (§ 3,c) la donnée supplémentaire d'une sous-catégorie formée d'injections canoniques, qui est fournie naturellement dans tous les exemples visés. Le premier avantage sera l'énoncé (prop. 12') d'une caractérisation des F-connexions dans certains cas.

Le chapitre III contient les développements et des compléments de la note [PW]. On introduit (§ 1), sous le nom de F-objets tronquables, une condition de régularité, automatiquement vérifiées par les connexions, et qui permet de projeter, de deux façons, un F-objet sur des F-objets d'ordres inférieurs. Ces projections détermineront les facteurs de la décomposition lorsqu'il en existe (prop. 16).

On définit en toute généralité la loi "$\star$" (§ 2), qui contient comme cas particulier celles de Virsik et de Kolář (tout au moins si l'on se place dans le cadre des fibrés, et non des groupoïdes), et on établit (§ 3) ses propriétés fondamentales : associativité (proposition 13), régularité (corollaire 2, prop. 13), unicité de la décomposition irréductible (théorème 1).

On étudie ensuite les F-objets semi-holonomes (§ 4) pour lesquels on étend (théorèmes 2 et 3), de la façon dont il a été indiqué plus haut, le théorème de simplicité de Virsik.

Chaque chapitre débute par un bref résumé (de son contenu).

Les renvois tels que (II,2,b) signifieront chapitre II, paragraphe 2, alinéa b. Les renvois bibliographiques se font par des lettres entre crochets.

Toutes les variétés sont supposées $\mathcal{C}^\infty$.

I - PRELIMINAIRES

Ce chapitre contient essentiellement des rappels de quelques résultats adaptés à notre étude : compositions de transformations naturelles, connexions d'ordre supérieur.

Remarque sur les notations : si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un endofoncteur, on notera toujours F^n le $n^{ième}$ itéré de F. Pour éviter des confusions, nous serons donc amenés à noter J_r au lieu de la notation classique J^r certains foncteurs définis à partir des r-jets holonomes.

1 - RAPPELS SUR LES CATEGORIES ([E$_9$] , [MA])

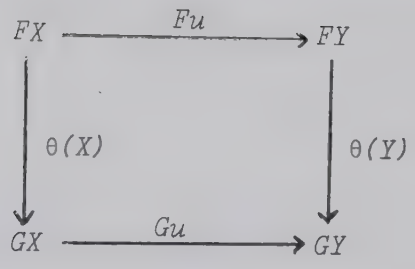
a) Transformation naturelle

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, F et G deux foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$.

Définition

Une transformation naturelle de F vers G, soit $\theta : F \to G$, *est la donnée pour tout objet X de* $\mathcal{C}$, *d'une flèche* $\theta(X) : F(X) \to G(X)$ *avec la condition que pour toute flèche u :* $X \to Y$ *le diagramme suivant est commutatif :*

(I)



b) Composition verticale de transformations naturelles

Fixons deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ et soient F,G,H des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$, $\theta : F \to G$ et $\varphi : G \to H$ des transformations naturelles. Pour tout objet X de $\mathcal{C}$ on pose,

$$(\varphi.\theta)(X) = \varphi(X)\ \theta(X) ,$$

le deuxième membre est la composition de flèches dans $\mathcal{D}$.

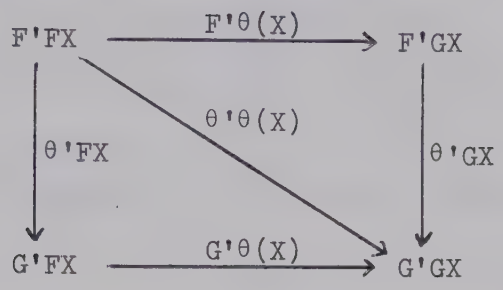
On vérifie que la correspondance $X \rightsquigarrow (\varphi . \theta)(X)$ définit une transformation naturelle de F vers H appelée composition verticale de θ et φ. Munies de cette loi, les transformations naturelles de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ sont les flèches d'une catégorie dont les objets sont les foncteurs.

c) Composition horizontale (ou longitudinale) de transformations naturelles

Considérons 3 catégories $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$; des foncteurs F et G (respt. F' et G') de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ (respt. de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{E}$) ; des transformations naturelles $\theta : F \to G$, $\theta' : F' \to G'$. Pour tout objet

X de $\mathfrak{C}$, on obtient le diagramme ci-dessous en appliquant (I) à θ' et à la flèche $u = \theta(X)$

(II)



Posons $\theta'\theta\ (X) = \theta'(G(X))F'\theta(X) = (G'\theta\ X)\ (\theta'FX)$.

Proposition 1

La correspondance $X \rightsquigarrow \theta'\theta(X)$ *définit une transformation naturelle de F'F vers G'G appelée* composition horizontale ou longitudinale *de* θ *et* θ'.

Tout foncteur F de $\mathfrak{C}$ vers $\mathfrak{D}$ peut s'identifier à la transformation naturelle identique de F vers F (et désignée également par F) $F : X \longrightarrow (F(X) \xrightarrow{id\ F(X)} F(X))$. On a donc

$$\theta'\theta = \theta'G.F'\theta = G'\theta\ .\ \theta'F$$

Les catégories sont ainsi les objets d'une "catégorie" notée Cat, dont les flèches sont les transformations naturelles munies de la composition horizontale.

Proposition 2

Soient φ, $\theta, \varphi', \theta'$ *des transformations naturelles. Alors on a*

$$(\varphi'\theta').(\varphi\theta) = (\varphi'.\varphi)(\theta'.\theta)$$

lorsque les deux membres ont un sens.

En particulier si $\varphi = \varphi' = F$ est un foncteur,

$$F(\theta'.\theta) = F\theta'.F\theta \quad ,$$

et si

$$\theta = \theta' = F'$$

$$(\varphi'.\varphi)F' = (\varphi'F').(\varphi F') \ .$$

Signalons un cas de composition horizontale qui sera abondamment utilisé dans la suite. Considérons pour cela une catégorie $\mathfrak{C}$, un foncteur F de $\mathfrak{C}$ vers $\mathfrak{C}$ et une transformation naturelle s de F vers le foncteur identité I de $\mathfrak{C}$. Par itération longitudinale de s, on définit s^n qui est une transformation naturelle de F^n vers I. D'après la proposition 1, on a :

$$s^{n+1} = s^n s = s^n.F^n s = s s^n = s^n.sF^n$$

D'où par récurrence,

$$s^{n+1} = s.sF. \ldots\ldots sF^n = s.Fs. \ldots\ldots F^n s \ .$$

Pour $q \leq r$ et $p = r - q$, nous poserons

$$s^r_p = s^{p+q}_p = F^p s^q \qquad \text{et} \qquad {}^r_p s = {}^{p+q}_p s = s^q F^p$$

s^r_p et ${}^r_p s$ sont des transformations naturelles de F^r vers F^p . De la

proposition 2, il résulte les égalités :

$$s^{p+q}_{p} = F^{p}(s.Fs. \ldots\ldots F^{q-1}s) = F^{p}s.F^{p+1}s. \ldots\ldots F^{p+q-1}s$$

et $$\overset{p+q}{p}s = sF^{p}.sF^{p+1}. \ldots\ldots sF^{p+q-1} .$$

Donnons quelques propriétés de s^{r}_{p} et $\overset{r}{p}s$.

1°) $s^{r}_{o} = \overset{r}{o}s = s^{r}$,

2°) pour $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant r$ on a

$$s^{q}_{p} . s^{r}_{q} = s^{r}_{p} \quad \text{et} \quad \overset{q}{p}s . \overset{r}{q}s = \overset{r}{p}s .$$

Le 1°) résulte des définitions de s^{r}_{p} et $\overset{r}{p}s$. Quant au 2°), montrons par exemple la première égalité, la deuxième s'en déduisant par symétrie :

$$s^{r}_{p} = F^{p}s^{r-p} = F^{p}(s.Fs. \ldots F^{q-p-1}. F^{q-p}\ldots\ldots F^{r-p-1}s)$$

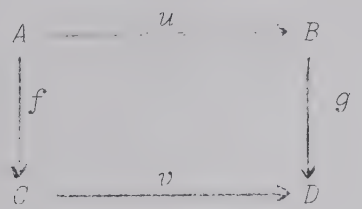
$$= F^{p}(s^{q-p}.F^{q-p}(s.Fs \ldots\ldots F^{r-q-1}s))$$

$$= F^{p}(s^{q-p}.F^{q-p}s^{r-q}) = F^{p}s^{q-p}.F^{q}s^{r-q} = s^{q}_{p} . s^{r}_{q} .$$

d) Carrés cartésiens

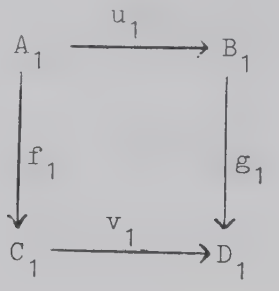
Définitions

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un carré commutatif ou quatuor de $\mathcal{C}$

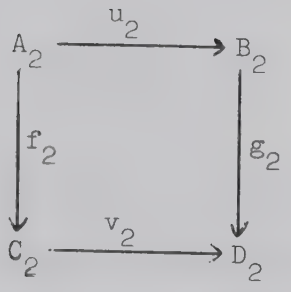


est dit <u>*cartésien*</u>*, si pour tout couple de flèches* $h : E \to B$, $k : E \to C$ *vérifiant* $gh = vk$, *il existe une unique flèche* $l : E \to A$ *telle que* $f\,l = k$ *et* $ul = h$

Si (q_1)



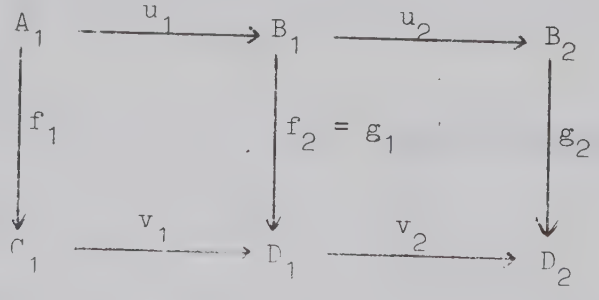
et (q_2)



sont deux quatuors de $\mathcal{C}$, on peut définir deux autres quatuors dans les conditions et de la façon suivantes :

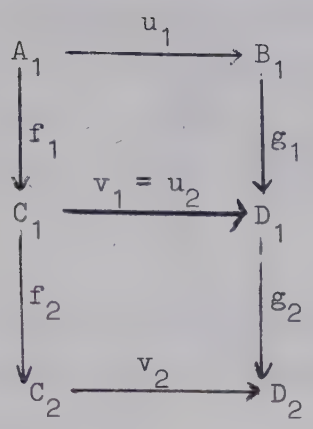
(i) $f_2 = g_1$ et alors

$q_2 \square q_1$:



(ii) $u_2 = v_1$ et alors

$q_2 \boxminus q_1$



Les quatuors de $\mathfrak{C}$ munis des lois $\boxminus$ (composition verticale) et $\square\!\square$ (composition latérale) sont les objets d'une catégorie double ($[E_9]$, $[E_{11}]$).

On démontre facilement la

Proposition 3

Soient q_1 et q_2 deux quatuors d'une catégorie $\mathfrak{C}$, latéralement (respectivement verticalement) composables. Si q_2 est cartésien, les conditions suivantes sont équivalentes :

1°) q_1 est cartésien

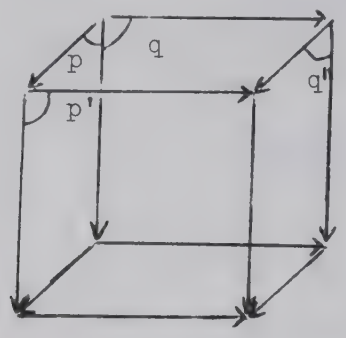
2°) $q_2 \square\!\square q_1$ (respt. $q_2 \boxminus q_1$) est cartésien.

Nous aurons souvent besoin du

Corollaire

Si p,q,p',q' sont des quatuors tels que $p' \square\!\square p = q' \square\!\square q$ (ou $p' \boxminus p = q' \boxminus q$) et p,p',q' sont cartésiens, il en est de même de q.

Le corollaire signifie que dans "un cube" commutatif (voir diagramme ci-dessous) dont les "faces latérales et avant" sont cartésiennes, la "face arrière" est aussi cartésienne.



On a une interprétation semblable dans le cas $p' \boxminus p = q' \boxminus q$.

2 - CONNEXIONS D'ORDRE SUPERIEUR

$\mathscr{C}^\infty$. Rappelons que toutes les variétés considérées sont supposées

Notations

Si A et B sont deux variétés, on notera pour tout entier naturel r, $J_r(A,B)$ (respectivement $\overline{J}_r(A,B)$, $J_r(A,B)$) la variété des jets non holonomes (respt. semi-holonomes, holonomes) de A dans B ($[E_2]$, $[E_3]$, $[E_4]$, $[VE_2]$). Si $r = 1$, $\tilde{J}_1(A,B) = \overline{J}_1(A,B)$ $= J_1(A,B) = J(A,B)$. Pour toute application différentiable f de A dans B, $j^r f$ désignera le prolongement d'ordre r de f.

Si $0 \leq q \leq r$, on notera $b_q^r : \tilde{J}_r(A,B) \to \tilde{J}_q(A,B)$ l'application naturelle qui à un r-jet fait correspondre le q-jet sous-jacent. On pose $\tilde{J}_0(A,B) = \overline{J}_0(A,B) = J_0(A,B) = B$, de sorte que b_0^r désigne l'application "but".

a) Connexions sur un groupoïde différentiable
($[E_7]$, $[K_4]$, $[V\ E_1]$, $[V\ E_3]$, $[V\ I_1]$, $[V\ I_2]$.

Les rappels de la théorie des connexions d'ordre supérieur sur un groupoïde différentiable introduite dans $[E_7]$ sont faits ici d'après $[K_4]$.

Soit G un groupoïde différentiable ($[E_6]$), de base B, d'applications source et but α et β . Nous noterons ε_G le plongement canonique de B dans G, $\pi_G = (\beta, \alpha) : G \to B \times B$. On désignera par un point gras ($\bullet$), la loi de composition partielle dans $\underset{\sim}{G}$ ainsi que son prolongement dans J(B,G) et par récurrence dans $J_r(B,G)$.

Définition

Le groupoïde G est dit $\mathcal{S}$-transitif si π_G est une surmersion, ce qui équivaut à dire que G est transitif et localement trivial ($[E_6]$).

Soit G un groupoïde $\mathcal{S}$-transitif de base B.

Définition

Une connexion non holonome d'ordre r sur G est une application différentiable Γ de B dans $\underset{\sim}{J}_r(B,G)$ vérifiant les conditions suivantes :

$$b_o^r\ \Gamma = \varepsilon_B\ ;\quad (j_\alpha^r)\ \Gamma(x) = j_x^r\ ,\quad (j^r\beta)\ \Gamma\ (x) = j_x^r$$

où j_u^r est le jet d'ordre r en u de l'application constante $y \longmapsto u$, j_x^r le r-jet en x de l'application identique de B dans B ; les premiers membres des deux dernières égalités sont des compositions de

jets. Ces égalités impliquent aussi que pour tout $x \in B$, $\Gamma(x) \in \tilde{J}_r(G_x,\beta)$, où $G_x = \alpha^{-1}(x)$ et $\beta = \beta \mid G_x$ et $\tilde{J}_r(G_x,\beta)$ les r-jets de sections de β.

On a une définition analogue pour les connexions semi-holonomes et holonomes.

Pour tout $0 < q \leqslant r$, $b_q^r \Gamma$ est une connexion d'ordre q sur G.

Soit $\theta \in G$; notons $\hat{\theta}^r$ le r-jet de l'application constante égale à θ de B dans G. G opère sur la surmersion :

$$\alpha\, b_o^r : \quad \tilde{J}_r(B,G) \to B \text{ par}$$

$$\tilde{J}_r(B,G) \times G \to \tilde{J}_r(B,G), \qquad \alpha\, b_o^r = \beta$$

$$(X, \theta) \to X \bullet \hat{\theta}^r = X\,\theta$$

En particulier lorsque Γ est une connexion d'ordre r sur G et $X = \Gamma(x)$.

Par prolongement de la loi précédente et pour tout entier q, nous avons une loi de composition partielle :

$$\tilde{J}_q(B,\tilde{J}_r(B,G)) \times \tilde{J}_q(B,G) \to \tilde{J}_q(B,\tilde{J}_r(B,G))$$

Soient maintenant Γ et Γ_1 deux connexions sur G d'ordres respectifs r et q. En utilisant le plongement canonique de $\tilde{J}_{q+r}(B,G)$ dans $\tilde{J}_q(B,\tilde{J}_r(B,G))$, nous avons une application

$$\Gamma * \Gamma_1 : \quad B \to \tilde{J}_{q+r}(B,G)$$

définie par :

$$\Gamma * \Gamma_1(x) = j_x^q \Gamma\, \Gamma_1(x), \text{ pour tout } x \text{ dans } B.$$

Proposition 4 ($[K_4]$)

Si Γ *et* Γ_1 *sont deux connexions d'ordres respectifs r et q sur le groupoïde* $\mathcal{Y}$*-transitif G,* $\Gamma \star \Gamma_1$ *est une connexion d'ordre* $r + q$ *sur G. De plus si* Γ_2 *est une troisième connexion* $(\Gamma \star \Gamma_1) \star \Gamma_2 = \Gamma \star (\Gamma_1 \star \Gamma_2)$.

Virsik a introduit dans $[V\ I_2]$ la même loi de composition, mais uniquement dans le cas où Γ_1 est une connexion d'ordre un. Lorsque $\Gamma_1 = b_1^r\ \Gamma$, $\Gamma \star \Gamma_1$ coïncide avec le prolongement d'ordre un de Γ introduit par Ehresmann dans $[E_7]$ et repris par différents auteurs (voir entre autre $[V\ E_1]$, $[V\ E_3]$, $[V\ I_2]$).

b) Catégorie $\mathcal{S}_B$

Pour toute surmersion $\pi : M \to B$, on notera $J^r(M,\pi)$ (respectivement $\overline{J}^r(M, \pi)$, $J_r(M,\pi)$) ou en omettant π s'il n'y a pas risque de confusion, la variété des jets non holonomes (respt. semi-holonomes, holonomes) d'ordre r des sections de π .
Lorsque r = 1, $J^1(M, \pi) = \overline{J}^1(M,\pi) = J_1(M,\pi) = J(M,\pi)$.

Définition

Soient $E_1 = (\pi_1 : M_1 \to B)$ *et* $E_2 = (\pi_2 : M_2 \to B)$ *deux surmersions. Un* B*-morphisme de* E_1 *dans* E_2 *est une application différentiable f de* M_1 *dans* M_2 *telle que* $\pi_2 f = \pi_1$.

Les surmersions sur B sont les objets d'une catégorie $\mathcal{S}_B$ dont les flèches sont les B-morphismes de surmersions.

Pour toute surmersion $E = (\pi : M \to B)$ l'application $\pi^1 : J(M,\pi) \to B$ qui à un 1-jet associe sa source est une surmersion. La correspondance $(\pi : M \to B) \rightsquigarrow (\pi^1 : J(M,\pi) \to B)$, détermine un foncteur (covariant) noté $\mathbf{J}$ de $\mathcal{S}_B$ dans elle-même. De plus l'application de $\mathbf{J}(M, \pi)$ dans M qui à un 1-jet associe son but, définit une transformation naturelle s de $\mathbf{J}$ vers le foncteur identité de $\mathcal{S}_B$. Nous sommes donc dans la situation décrite à la fin du paragraphe 1.

c) Connexions principales ([K$_5$] , [L$_3$]).

(i) Catégorie $\mathcal{S}_B$ (H)

Considérons un groupe de Lie fixé H.

Définitions

1) On dira que H opère à droite sur la surmersion $E = (\pi : M \to B)$, si H opère à droite différentiablement sur M, et si pour tout $(x,h) \in M \times H$, $\pi(x\,h) = \pi(x)$, xh désignant l'image de (x,h).

2) Si H opère à droite sur deux surmersions $E_1 = (\pi_1 : M_1 \to B)$ et $E_2 = (\pi_2 : M_2 \to B)$, et si on note γ_i l'opération de H sur E_i $(i = 1,2)$, un morphisme de (E_1, γ_1) dans (E_2, γ_2) est une flèche f de $\mathcal{S}_B$ de E_1 vers E_2 telle que $f(xh) = f(x)h$ pour tout $(x,h) \in M_1 \times H$.

3) L'ensemble des couples (E,γ) où E est une surmersion sur B et γ une opération à droite de H sur E sont les objets d'une catégorie notée $\mathcal{S}_B(H)$, dont les flèches sont définies comme ci-dessus.

Si H opère à droite sur $E = (\pi : M \to B)$, H opère par prolongement de la loi d'action sur la surmersion $\boldsymbol{J}E = (\pi^1 : J(M,\pi) \to B)$ et par récurrence sur $\boldsymbol{J}^r E = (\tilde{\pi}^r : \tilde{J}_r(M,\pi) \to B)$. Le foncteur $\boldsymbol{J}$ (introduit en b), induit donc un foncteur encore noté $\boldsymbol{J}$, de $\mathcal{S}_B^{(H)}$ dans elle-même. De même s induit une transformation naturelle de $\boldsymbol{J}$ vers le foncteur identité de $\mathcal{S}_B^{(H)}$.

(ii) Soit $E = (\pi : M \to B)$ un objet de $\mathcal{S}_B(H)$.

Définition

- *Une connexion non holonome d'ordre r sur E est une flèche $\gamma : E \to J^r E$ de $\mathcal{S}_B(H)$ section de sE.*

On a une définition analogue pour les connexions semi-holonomes et holonomes en désignant par $\bar{J}_r E$ (respt. $J_r E$) la surmersion :

$$\bar{\pi}^r : \bar{J}_r(M,\pi) \to B \quad (\pi^r : J_r(M,\pi) \to B).$$

Notons que pour tout $0 < q \leq r$, $s_q^r E \cdot \gamma$ et ${}_q^r sE \cdot \gamma$ sont des connexions d'ordre q sur E.

γ est dite principale si E est un fibré principal. En particulier si $r = 1$, on retrouve la notion habituelle de connexion sur un fibré principal.

Proposition 5 ($[K_5]$)

Soient γ *et* γ_1 *deux connexions d'ordres respectifs r et q sur l'objet E de* $\mathcal{G}_B(H)$. *Alors* $\gamma * \gamma_1 = J^q\gamma \cdot \gamma_1$ *est une connexion d'ordre r+q sur E. De plus si* γ_2 *est une troisième connexion*

$$\gamma * (\gamma_1 * \gamma_2) = (\gamma * \gamma_1) * \gamma_2 \quad .$$

Définition

1) $\gamma * \gamma_1$ *est appelée composée de* γ_1 *et* γ.

2) *si* $\gamma_1 = s_1^r E \cdot \gamma$, $\gamma^1 = \gamma * \gamma_1$ *est appelé premier prolongement de* γ. *On définit alors, par récurrence pour tout p, le prolongement d'ordre p de* γ *par*

$$\gamma^p = (\gamma^{p-1}) * \gamma_1 = (\gamma^{p-1}) * s_1^r E$$

(iii) Relation entre connexion principale et connexion sur un groupoïde différentiable ($[K_1]$, $[K_5]$).

Rappelons ($[E_6]$, $[L_3]$) que si (P,B,H,π) est un fibré principal, les isomorphismes de fibres sur fibres de P forment un groupoïde différentiable $\mathcal{S}$-transitif G (cf. a). Inversement tout tel groupoïde peut être obtenu à isomorphisme près de cette façon. De plus pour tout $x \in B$, tout $u \in P_x$ définit un difféomorphisme, noté $\hat{u}$, de $G_x = \alpha^{-1}(x)$ sur P ($[K_1]$).

Soit Γ une connexion d'ordre r sur le groupoïde $\mathcal{S}$-transitif G ; définissons $\gamma_\Gamma : P \to J^r(P, \pi)$ par $\gamma(u) = (j^{r\check{}}u)(\Gamma(x))$ (composition de jets).

Proposition 6 ([K$_1$]), [K$_5$])

Soit G le groupoïde $\mathcal{S}$-transitif associé au fibré principal P. Pour toute connexion Γ sur G, γ_Γ est une connexion du même ordre sur P. Toute connexion sur P est obtenue de cette façon. En outre si Γ_1 est une autre connexion sur G, $\gamma_\Gamma * \gamma_{\Gamma_1} = \gamma_{\Gamma * \Gamma_1}$.

A la lumière de la proposition 6, il apparaît clairement que pour tout fibré principal P, la loi de composition définie sur l'ensemble $\gamma(P)$ des connexions sur P, coïncide à isomorphisme près, avec celle définie sur les connexions $\Gamma(G)$ du groupoïde $\mathcal{S}$-transitif associé. Mais il est clair aussi que la loi de composition définie sur $\Gamma(G)$ en (2,a) est d'un maniement lourd et délicat. On sait d'autre part que $J(P,\pi)$, l'ensemble de 1-jet de sections de P, n'est pas un fibré principal en général. Il est donc nécessaire de sortir du cadre de la catégorie des fibrés principaux si on veut exprimer aisément les connexions principales en termes catégoriels. Comme il a été annoncé, nous allons maintenant décrire un formalisme simple qui contient comme cas particulier les connexions de $\mathcal{S}_B(H)$ (cf. 2, c).

II - F - O B J E T S

La notion de F-objet introduite dans $[P_4]$ sous le nom de S-objet est rappelée et généralisée à l'ordre supérieur.

1 - CATEGORIE A PROLONGEMENT ([Me] , $[P_4]$)

a) Définition

On appelle catégorie à prolongement la donnée :

- *d'une catégorie $\mathcal{C}$ munie de produits finis,*
- *de deux sous-catégories $\mathcal{I}$ et $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}$ stables par produits finis,*
- *d'un foncteur F de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$ dit de prolongement,*
- *d'une transformation naturelle s de F vers le foncteur identité de $\mathcal{C}$, le tout vérifiant les conditions suivantes :*

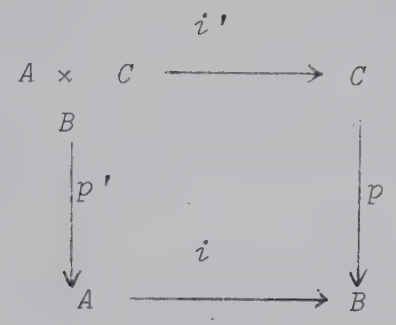
(i) $\mathcal{I}$ est stable par F et pour tout objet E de $\mathcal{C}$, sE est une flèche de $\mathcal{S}$,

(ii) les flèches de $\mathcal{I} \cap \mathcal{S}$ sont les isomorphismes de $\mathcal{C}$,

(iii) stabilité à la source : si pi est dans $\mathcal{I}$, alors i est dans $\mathcal{I}$,

(iv) transversalité : pour tout couple de flèches i : A → B de $\mathcal{I}$, p : C → B de $\mathcal{S}$, il existe un produit fibré

noté $A \underset{B}{\times} C$



tel que $i' \in \mathcal{J}$ *et* $p' \in \mathcal{S}$.

(v) F est compatible avec les produits et les produits fibrés du type précédent, c'est-à-dire que F (A × C) est isomorphe à F A × F C et F (A $\underset{B}{\times}$ *C) à F A* $\underset{FB}{\times}$ *FC .*

(vi) "Prolo" : si g : A → B est dans $\mathcal{S}$*, la flèche (sA,Fg) : FA → A* $\underset{B}{\times}$ *FB est dans* $\mathcal{S}$ *.*

De cette définition nous pouvons déjà tirer un certain nombre de conséquences :

1°) Toute flèche inversible à gauche est dans $\mathcal{J}$.

2°) Pour tout morphisme g : A → B, la flèche (id_A, g) : A → A × B est dans $\mathcal{J}$, en particulier si g = id_A , l'application "diagonale" (id_A, id_A) : A → A × A est dans $\mathcal{J}$.

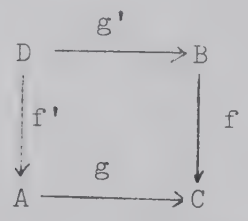
3°) L'existence du produit fibré subsiste si on s'abstient de l'hypothèse i $\in \mathcal{J}$ et de la conclusion i' $\in \mathcal{J}$; en outre A $\underset{C}{\times}$ B → A × B est dans $\mathcal{J}$.

4°) $\mathcal{J}$ est stable par F.

Pour les démonstrations de ces propriétés, nous renvoyons

à $[M_e]$ ou $[P_4]$.

5°) Si le carré commutatif



est cartésien $[I,1,e]$ et si f est dans $\mathcal{S}$ (g dans $\mathcal{T}$) alors f' $\in \mathcal{S}$ (resp. g' $\in \mathcal{T}$) : car D est isomorphe à $A \underset{C}{\times} B$.

Notations

Une catégorie à prolongement, de foncteur de prolongement F, sera désignée par $(\mathcal{C}, F)$ ou simplement par $\mathcal{C}$ s'il n'y a pas ambiguité. Les flèches de $\mathcal{T}$ (respt. de $\mathcal{S}$) seront représentées par $\rightarrowtail$ (respt. $\twoheadrightarrow$), les isomorphismes par $\simeq$.

Soient $(\mathcal{C},F)$ une catégorie à prolongement et r un entier, $r > 0$. Par itération de s au sens de la composition horizontale $(I,1,c)$, et de F, on obtient une transformation naturelle s^r de F^r vers le foncteur identité de $\mathcal{C}$. Plus précisément nous avons

Proposition 7

$(\mathcal{C},F^r)$ est une catégorie à prolongement.

Les sous-catégories de la définition sont $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$, et seul l'axiome "prolo" demande une indication ; nous la ferons par récurrence sur r.

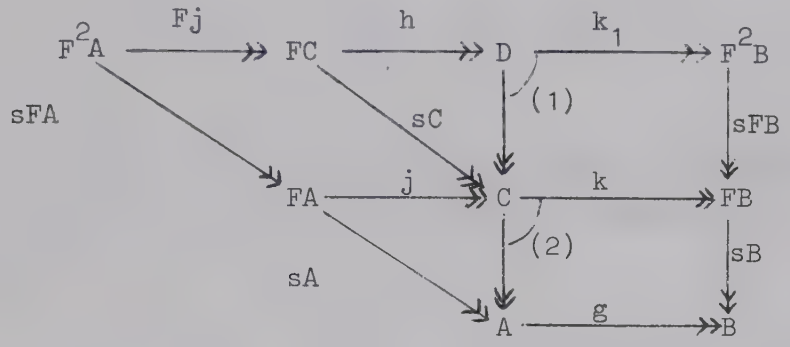
Soit $g : A \to B$ un $\mathcal{S}$-morphisme. Pour $r = 2$, montrons que $j^2 = (s^2A, F^2g) : F^2A \to A \underset{B}{\times} F^2B$ est dans $\mathcal{S}$; posons $C = A \underset{B}{\times} FB$,

$D = C \underset{FB}{\times} F(FB) = C \underset{FB}{\times} F^2B$.

On sait, d'après l'axiome "prolo", que $j = (sA, Fg) : FA \to A \underset{B}{\times} FB$

et $h = (sC, Fk) : FC \to C \underset{FB}{\times} F^2B$ sont des $\mathcal{S}$-morphismes, k étant

la projection canonique de C vers FB. Nous avons alors le diagramme commutatif suivant :



où les carrés (1) et (2) sont cartésiens par construction, d'où aussi (prop. 3), (2) $\boxminus$ (1). Par suite $D = A \underset{B}{\times} F^2B$. Par ailleurs

$$kj = Fg \quad , \quad k_1 h = F\,k$$

$$k_1 . h . Fj = Fk \,.\, Fj = F^2 g \ ,$$

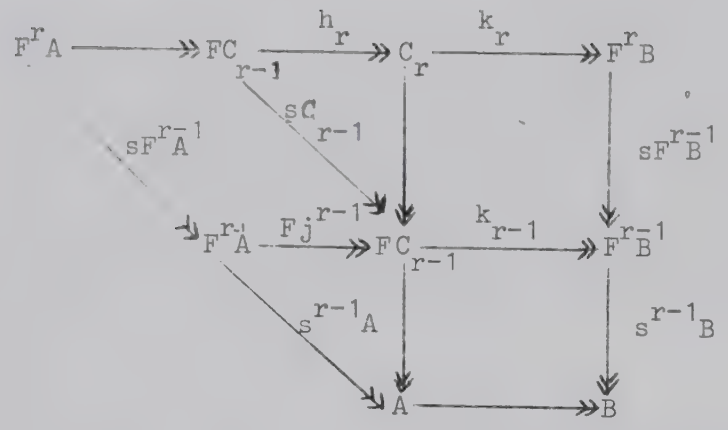
donc $(s^2A, F^2g) = h \,.\, Fj$ est un $\mathcal{S}$-morphisme.

Supposons que pour r-1 la flèche

$j^{r-1} = (s^{r-1}A, F^{r-1}g) : F^{r-1}A \to C_{r-1} = A \underset{B}{\times} F_B^{r-1}$ soit dans $\mathcal{S}$ et

montrons que $j^r = (s^rA, F^rg) : F^rA \to C_r = A \underset{B}{\times} F^rB$ est un $\mathcal{S}$-morphisme.

Nous avons le diagramme suivant (analogue à celui ci-dessus) :



Par un raisonnement analogue au cas où r = 2, on déduit que $C_r = C_{r-1} \underset{F^{r-1}B}{\times} F^r B$, et d'après l'axiome "prolo"

$h_r = (sC_{r-1}, F\,k_{r-1}) : F\,C_{r-1} \to C_r$ est dans $\mathcal{S}$.

On a aussi $k_{r-1} j^{r-1} = F^{r-1} g$, $k_r j^r = F\,k_{r-1}$ et

$(s^r A, F^r g) = h_r \cdot F\,j^{r-1}$ est un $\mathcal{S}$-morphisme.

Donc $k_r \cdot h_r \cdot F\,j^{r-1} = F\,k_{r-1} \cdot F\,j^{r-1} = F\,(k_{r-1} \cdot j^{r-1}) = F^r g$;

par suite $(s^r A, F^r g) = h_r \cdot F\,j^{r-1}$ est un $\mathcal{S}$-morphisme.

b) Exemples de catégories à prolongements

Rappelons que toutes les variétés et applications différentiables sont supposées $\mathcal{C}^\infty$.

(1) $\mathcal{C}$ est la catégorie Diff des applications différentiables, $\mathcal{J}$ (respt. $\mathcal{S}$) la sous-catégorie formée de plongements (respt. surmersions), F le foncteur "tangent" ; s est défini, pour toute variété M, par $s_M : F(M) = TM \to M$ associant à tout vecteur tangent son origine.

(2) Si B est une variété fixée, $\mathcal{C}$ est la catégorie $\mathcal{S}_B$ introduite en (I,2,a), $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{S}$), la sous-catégorie de plongements (respt. surmersions), F le foncteur $\mathcal{J}$ de (I,2,a). Le produit est donné par la diagonale du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} E \underset{B}{\times} E' & \longrightarrow & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & B \end{array}$$

où $E \to B$ et $E' \to B$ sont deux surmersions sur B ; le produit fibré a pour support celui des variétés et la projection sur B est obtenue par composition de surmersions.

(3) On reprend l'exemple (2) en se limitant uniquement aux B-morphismes de fibrés vectoriels.

(4) Pour un groupe de Lie fixé H, et la variété B fixée, $\mathcal{C}$ est la catégorie $\mathcal{S}_B(H)$ introduite en (I,2,c) ; $\mathcal{I}$, $\mathcal{S}$, les produits et les produits fibrés sont définis comme en (2).

(5) Soit maintenant B, une variété fixée, modelée sur l'espace vectoriel E. Si H est un sous-groupe de Lie de GL(E), les 1-jets de E dans H de source 0 forment un groupe de Lie H_1 par prolongement de la loi de composition de H. Pour tout fibré principal (P,B,H), notons P^1 la variété des 1-jets d'isomorphismes locaux de fibrés principaux de source (0,e) de $E \times H$ dans P. $\mathcal{GL}(E)$ se représente dans les automorphismes de H_1, d'où un produit fibré $H^1 = \mathcal{GL}(E) \overset{\cdot}{\times} H_1$. (P^1,B,H^1) est un fibré principal. Prenons alors pour $\mathcal{C}$ la catégorie des B-morphismes de fibrés principaux (groupe non imposé), pour $\mathcal{I}$ (respt. $\mathcal{S}$) les plongements (respt surmersions) de $\mathcal{C}$. F est défini sur les objets,

pour tout fibré principal (P,B,H), par $F(P,B,H) = (P^1,B,H^1)$, et s par $sP : P^1 \to P$, le "but". Signalons en passant que si (P,B,H) est le fibré "nul" (B,B,e), F(B,B,e) est le fibré des repères de B.

Le foncteur F, appelé W dans [K2] , a été introduit simultanément et indépendamment par Kolář ([K2]) et Libermann ([L3]).

(6) Considérons ici un groupoïde différentiable G, de base B, de projections source et but α et β . Une section (locale) σ de α est dite inversible si $\beta\sigma$ est un difféomorphisme (local) de B. Les 1-jets des sections inversibles de α forment un groupoïde différentiable G^1, appelé premier prolongement d'Ehresmann de G ([E5] , [L3] , [VE1] , [VE3]). Notons que si G et G' sont deux groupoïdes $\mathcal{S}$-transitifs (I,2,a), de même base B, $G \underset{B \times B}{\times} G'$ possède une structure de groupoïde $\mathcal{S}$-transitif de même base.

Prenons une variété B, pour $\mathcal{C}$ la catégorie des B-foncteurs différentiables de groupoïdes $\mathcal{S}$-transitifs de base B, $\mathcal{J}$ (resp. $\mathcal{S}$) la sous-catégorie des plongements (resp. surmersions) ; F sera le foncteur de prolongement d'Ehresmann, s le "but" ; le produit dans $\mathcal{C}$ est donné par $G \underset{B \times B}{\times} G'$.

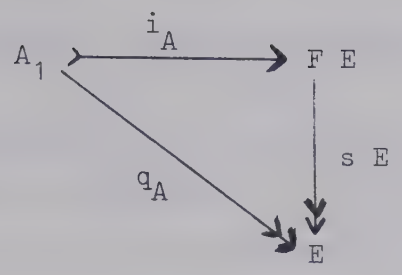
Désormais on suppose donnée une catégorie à prolongement $\mathcal{C}$.

2 - F-OBJET D'ORDRE UN ET PROLONGEMENTS ([Me] , [P4])

a) F-objet

(i) Définition

Soient A_1 et E des objets de $\mathcal{C}$. Un F-objet d'ordre un de base E et de support A_1, est la donnée d'un diagramme commutatif de $\mathcal{C}$ de la forme

A = 

Si q_A est un isomorphisme, on dira que A est une F-connexion. Il revient alors au même, à isomorphisme près, de se donner une section de sE.

(ii) Exemples

Donnons quelques exemples de F-objets et de F-connexions en reconsidérant un à un les exemples du § 1 :

(1') Dans l'exemple 1, les sous-fibrés des fibrés tangents sont des exemples de F-objets. Les F-connexions sont les champs de vecteurs.

(2') Ici les F-objets sont certains systèmes différentiels (non linéaires) : la condition "q_A est une surmersion" peut être interprétée comme une certaine condition de régularité. Les F-connexions sont les distributions d'ordre un de Kolář ($[K_1]$, $[K_5]$), ou les connexions généralisées de $[K_7]$, $[L_3]$.

(3') Les F-objets sont certains systèmes différentiels linéaires, d'ordre 1, les F-connexions sont les connexions vectorielles habituelles.

(4') Les F-connexions sont les connexions généralisées de (2') qui sont en outre invariantes par l'action (prolongée) de H ; de sorte que, si l'objet de base est de plus un fibré principal de groupe struc-

tural H, on retrouve les connexions principales décrites en (I,2,c).

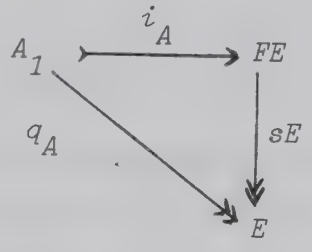
(5') Dans l'exemple (5), les F-objets sont certaines G-structures généralisées de Kolář ([K_6]) ; si P = B, les F-objets sont les G-structures ordinaires ([Y]), et les F-connexions sont les sections globales des G-structures, c'est-à-dire les parallélisations de B.

(6') Dans (6), les F-connexions sont les foncteurs-connexions d'ordre 1 de Libermann ([L_4]), ou encore des S-connexions intégrables au sens de [P_o] .

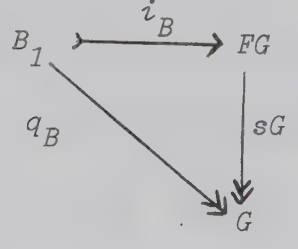
(iii) Morphisme de F-objets

Définition

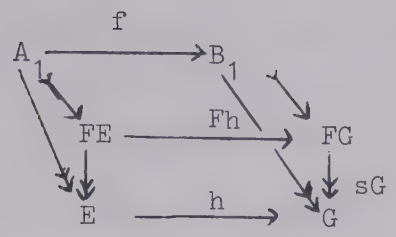
Soient A :



et B :



deux F-objets. Un morphisme de A vers B est un couple $f : A_1 \to B_1$, $h : E \to G$ *de* $\mathcal{C}$*-morphismes rendant commutatif le diagramme suivant :*

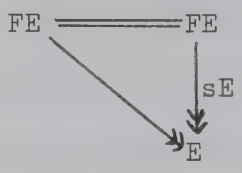


Les F-objets d'ordre un sont ainsi les objets d'une nouvelle catégorie notée $\mathcal{C}^1$.

Remarques

1) On a un foncteur canonique de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}^1$, qui a un objet E de $\mathcal{C}$ associe l'objet de $\mathcal{C}^1$, noté $E^{(1)}$, suivant :

$E^{(1)}$



ce foncteur permet d'identifier $\mathcal{C}$ à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}^1$.

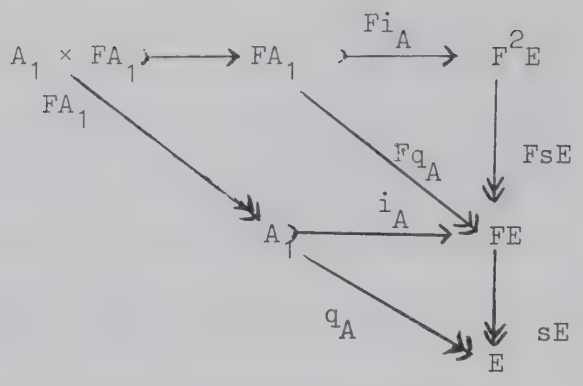
2) Dans $\mathcal{C}^1$ nous pouvons définir la sous-catégorie $\mathcal{J}^1$ (respt. $\mathcal{S}^1$) par la condition que f et h sont des $\mathcal{J}$-morphismes (respt. $\mathcal{S}$-morphismes)

b) Prolongements

On se propose ici de définir deux foncteurs dits abusivement de prolongement, de $\mathcal{C}^1$ vers $\mathcal{C}^1$.

(i) prolongement non holonome

Reprenant les notations de a), pour tout F-objet A, nous avons le diagramme commutatif :

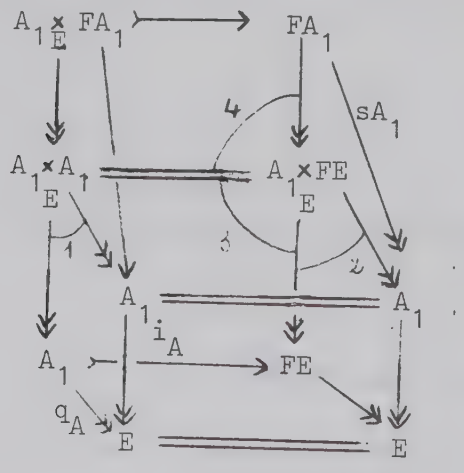


$\mathcal{T}$ et $\mathcal{Y}$ étant stables par F et en appliquant l'axiome de transversalité .

Proposition 8

$\mathcal{A}_1 = A_1 \underset{FA_1}{\times} FA_1$ est le support d'un F-objet d'ordre un, de base A_1 .

La démonstration tient dans le diagramme commutatif suivant :



où les faces "latérales" du cube sont cartésiennes par construction, d'où aussi les faces "arrière" (cor. prop. 3) et 4 (prop. 3). Par suite $FA_1 \to A_1 \underset{E}{\times} FE$ étant dans $\mathcal{S}$ (d'après l'axiome prolo), il en est de même de $A_1 \underset{FE}{\times} FA_1 \to A_1 \underset{E}{\times} A_1$ et donc de $A_1 \underset{E}{\times} FA_1 \to A_1$.

Du raisonnement précédent nous obtenons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \overset{\sim}{A_1} = A_1 \underset{FE}{\times} FA_1 & \longrightarrow & FA_1 \\ & \searrow & \downarrow sA_1 \\ & & A_1 \end{array}$$

qui est manifestement un F-objet d'ordre un, de base A_1 et de support $A_1 \underset{FE}{\times} FA_1 = \overset{\sim}{A_1}$.

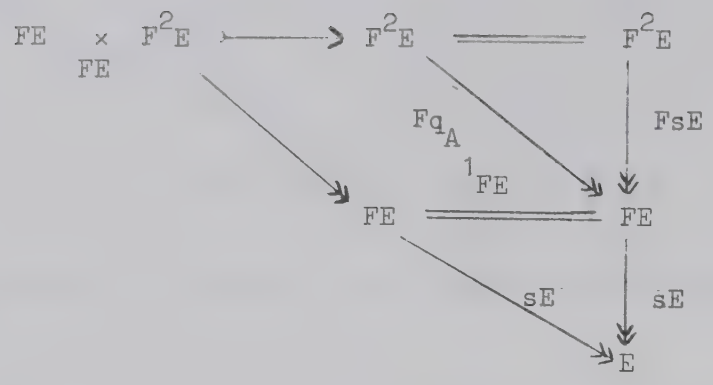
Notation et définition

On notera PA le F-objet de base A_1 ainsi construit et on l'appellera le premier prolongement non holonome de A.

La correspondance $A \rightsquigarrow PA$ définit un foncteur P dit de prolongement non holonome de $\mathcal{C}^1$ vers $\mathcal{C}^1$. Par itération de P, on définit le prolongement non holonome d'ordre r d'un F-objet A par $P^r A = P\,(P^{r-1} A)$.

Remarques

1) supposons que A soit le F-objet canonique $E^{(1)}$; le premier diagramme de (i) devient :

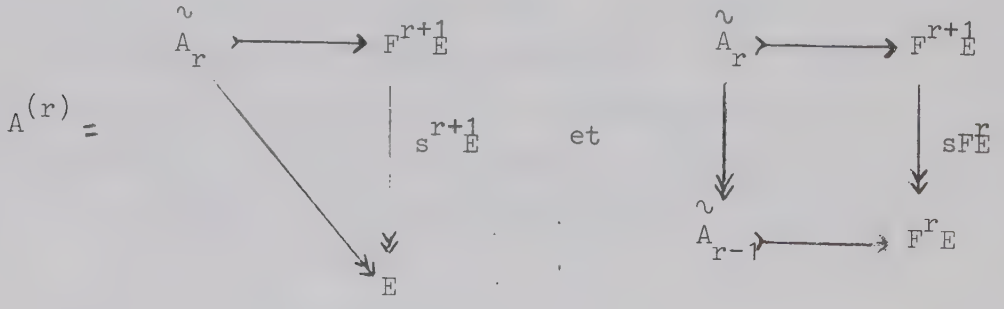


et donc $FE \underset{FE}{\times} F^2E \longrightarrow F^2E$ est un isomorphisme.

$PA = P(E^{(1)})$ est alors isomorphe au F-objet canonique $(FE)^{(1)}$. Autrement dit P induit F (à isomorphisme près) quand on identifie $\mathcal{C}$ à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}^1$ (cf. remarque a), (ii)).

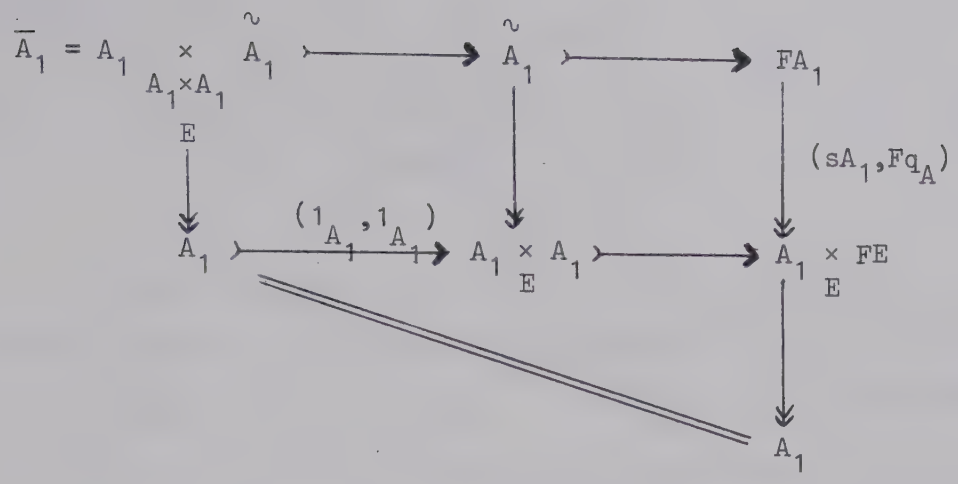
2) On a un $\mathcal{F}^1$-morphisme de PA vers A (cf a), (ii)), et par suite de P^rA vers A.

3) Par récurrence sur r, P^rA définit les diagrammes commutatifs : de la forme :

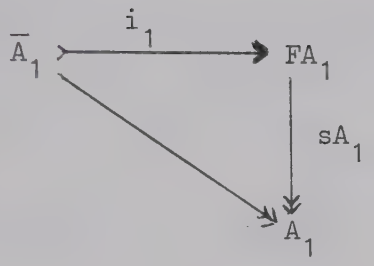


(ii) <u>prolongement semi-holonome</u>

Du premier diagramme de la proposition 8, nous déduisons le suivant :



d'où le F-objet :



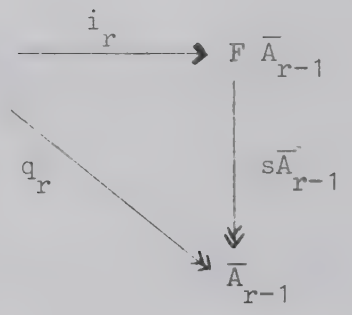
Définition et notation

Le F-objet de base A_1 et de support $\overline{A}_1$ ci-dessus est appelé premier prolongement semi-holonorme de A et noté $\overline{P}A$.

La correspondance $A \rightsquigarrow \overline{P}\,A$ définit un foncteur $\overline{P}$ de $\mathscr{C}^1$ vers $\mathscr{C}^1$ appelé foncteur de prolongement semi-holonome.

Par itération de $\overline{P}$, on définit par récurrence le prolongement semi-holonome d'ordre $r > 1$ de A par $\overline{P}^r A = \overline{P}\,(\overline{P}^{r-1} A)$, de support $\overline{A}_r$, de base $\overline{A}_{r-1}$; d'où le F-objet :

$\overline{P}^r A$:

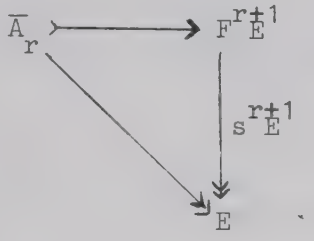


Remarques

1) Nous avons un $\mathcal{J}^1$-morphisme de $\overline{P}A$ vers PA et un $\mathcal{P}^1$-morphisme de $\overline{P}A$ vers A, donc de $\overline{P}^r A$ vers A.

2) Par récurrence sur r, $\overline{P}^r A$ définit un diagramme commutatif de la forme :

$\overline{A}^{(r)}$



3) Lorsque $A = E^{(1)}$ et alors $A_1 = E$, on posera $\overline{A}_r = \overline{E}_r = \overline{F}_{r+1}E$.

La correspondance $E \rightsquigarrow \overline{F}_{r+1}E$ définit un foncteur $\overline{F}_{r+1}$ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$.

4) Si $A = E^{(1)}$, la construction précédente de $\overline{P}A$ montre que $sFE.i_1 = FsE \cdot i_1$, autrement dit que $\overline{E}_1$ est le noyau de la double flèche sFE et FsE de $F(FE) = F^2E$ vers FE. De façon précise si i_p est le $\mathcal{J}$-morphisme de $\overline{E}_p$ vers $F\,\overline{E}_{p-1}$, définissons par récurrence le $\mathcal{J}$-morphisme j_m de $F\,\overline{E}_{m-1}$ vers $F^{m+1}E$ par

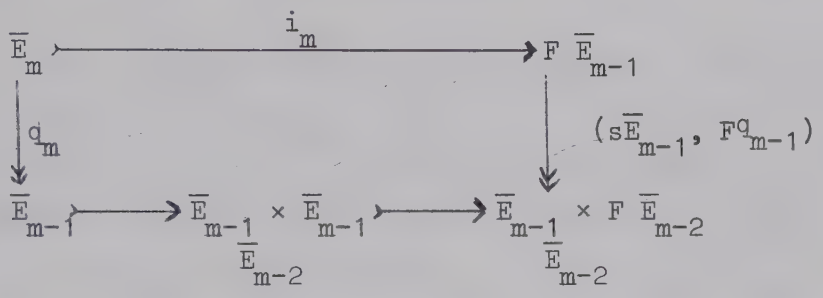
$j_m = F(j_{m-1}, i_{m-1})$ si $m \geq 1$, $j_o = i_o = 1_{FE}$. Alors nous avons :

Proposition 9

Pour tout objet E de $\mathcal{C}$, $\overline{E}_m$ est le noyau de la double flèche $F^m sE.\ j_m$ et $sF^m E\ .\ j_m$ de $F\overline{E}_{m-1}$ vers $F^m E$.

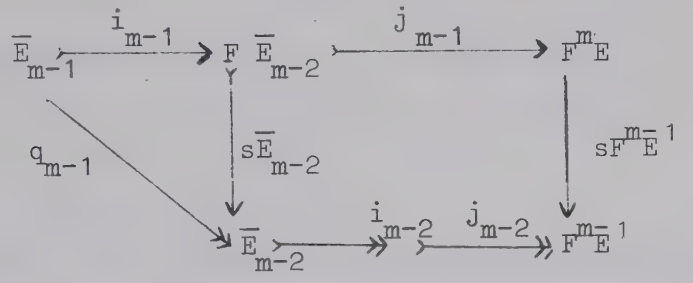
La démonstration se fait par récurrence sur m et revient à la remarque précédente pour m = 1. Par définition même, $\overline{E}_m$ est donné par le diagramme commutatif suivant :

(1)



Considérons par ailleurs le diagramme suivant

(2)



On a : $j_{m-1} \cdot i_{m-1} \cdot s\overline{E}_{m-1} \cdot i_m = sF^m\ E \cdot j_m \cdot i_m$; d'après la récurrence, on a également :

$$sF^{m-1}E.j_{m-1}.i_{m-1} = F^{m-1}sE.j_{m-1}.i_{m-1}\ .$$

Appliquons F à (2), d'où :

$$F\, j_{m-2} \cdot F\, i_{m-2} \cdot Fq_{m-1} \cdot i_m = F\, j_{m-2} \cdot F\, i_{m-2} \cdot Fs\overline{E}_{m-2} \cdot F\, i_{m-1} \cdot i_m$$

$$= F(sF^{m-1}E \cdot j_{m-1} \cdot i_{m-1}) \cdot i_m$$

$$= F(F^{m-1}sE \cdot j_{m-1} \cdot i_{m-1}) \cdot i_m$$

$$= F^m\, sE \cdot j_m \cdot i_m$$

D'après le diagramme (1), $s\overline{E}_{m-1} i_m = q_m$ et $Fq_{m-1} i_m = i_{m-1} \cdot q_m$.

Donc

$$j_{m-1} i_{m-1} \cdot s\overline{E}_{m-1} \cdot i_m = j_{m-1} \cdot i_{m-1} \cdot q_m = sF^m E \cdot j_m \cdot i_m$$

et

$$j_{m-1} \cdot Fq_{m-1} \cdot i_m = j_{m-1} \cdot i_{m-1} \cdot q_m = F(j_{m-2} \cdot i_{m-2} \cdot q_{m-1}) \cdot i_m$$

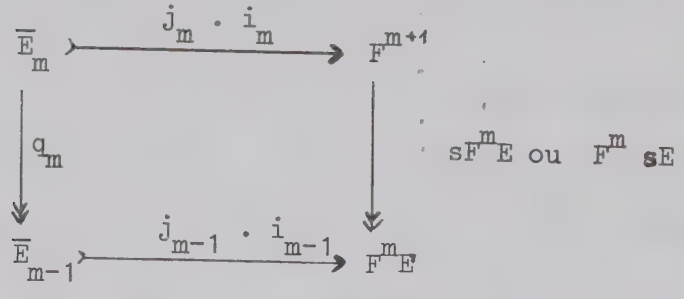
$$= F^m\, sE \cdot j_m \cdot i_m$$

d'où l'égalité :

$$F^m\, sE \cdot j_m \cdot i_m = sF^m E \cdot j_m \cdot i_m$$

Remarque

La démonstration précédente et le diagramme (2) indiquent que pour tout m, nous avons le diagramme commutatif :



Proposition 10 ([Me] , [P4])

$$\overline{A}_r = \tilde{A}_r \cap \overline{F}_{r+1} E$$

Cette proposition permet de retrouver la construction habituelle dans tous les exemples cités précédemment.

3 - F-OBJETS D'ORDRE SUPERIEUR ([P3] , [P4] , [PW])

Rappelons que dans une catégorie à prolongement $(\mathcal{C},F)$ les $\mathcal{J}$-morphismes (respt. $\mathcal{S}$-morphismes) seront représentés par $\rightarrowtail$ (respt. $\twoheadrightarrow$), et les isomorphismes par $\simeq$. De plus par itération de s et de F, on obtient pour tout entier $r > 0$, une catégorie à prolongement $(\mathcal{C}, F^r)$.

Pour tout objet E de $\mathcal{C}$ nous poserons $F^{\circ} E = E$, $s^{\circ} E = 1_E$.

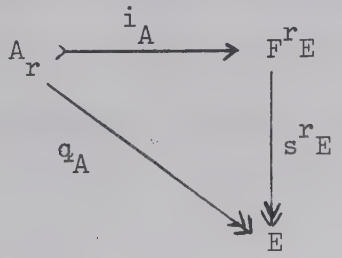
a) Les catégories $\mathcal{C}^{(r)}$

Définitions

(i) Soient r un entier ≥ 0, E et A_r des objets de $\mathcal{C}$.
Un F-objet d'ordre r est un F^r-objet de support A_r et de base E.

Autrement dit c'est un diagramme commutatif A de $\mathcal{C}$ de la forme

(A)



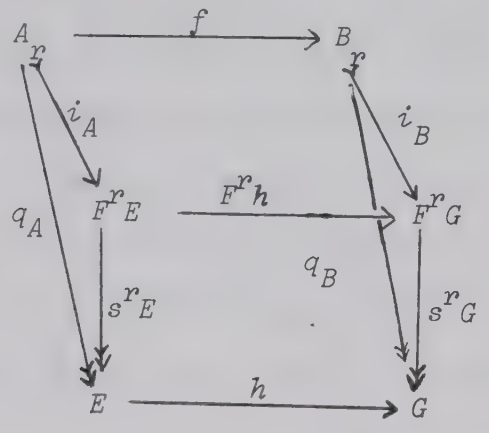
Si $r = 0$, alors $i_A = q_A$ est un isomorphisme

(ii) le F^r-objet A est une F-connexion d'ordre r s'il est une F^r-connexion sur E, c'est-à-dire si q_A est un isomorphisme.

Toute section de s^rE détermine une F^r-connexion ; la réciproque est vraie à un isomorphisme près. Les F^o-objets sont les F^o-connexions.

Notations Pour tout F^r-objet K, d'ordre r, on notera K_r le support de K, i_K (respt. q_K) le $\mathcal{J}$-morphisme $K_r \rightarrowtail F^rE$ (respt. $\mathcal{S}$-morphisme $K_r \twoheadrightarrow E$).

(iii) Soient A et B deux F^r-objets de base respectives E et G. Un morphisme de A vers B est un couple de $\mathcal{C}$-morphismes $f : A_r \longrightarrow B_r$ et $h : E \longrightarrow G$ tels que le diagramme ci-après commute dans $\mathcal{C}$:



Si E = G et h = 1_E , nous dirons plus simplement E-morphisme.

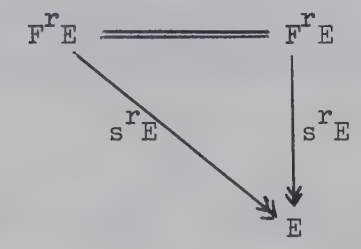
Les F^r-objets sont les objets d'une nouvelle catégorie notée $\mathcal{C}^{(r)}$, un $\mathcal{C}^{(r)}$-morphisme étant un couple (h,f) de $\mathcal{C}$-morphismes satisfaisant à la définition (iii). Dans $\mathcal{C}^{(r)}$ on définit les sous-catégories $\mathcal{J}^{(r)}$ et $\mathcal{S}^{(r)}$ par la condition que $(h,f) \in \mathcal{J} \times \mathcal{J}$ ou $(h,f) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$.

Remarque

Pour tout $r \geq 0$, nous avons un isomorphisme de $\mathcal{C}$ sur une sous-

catégorie pleine de $\mathcal{C}^{(r)}$, défini sur les objets par :

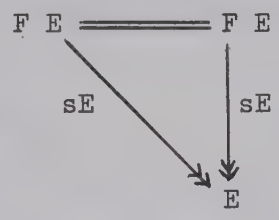
$E \rightsquigarrow E^{(r)}$:



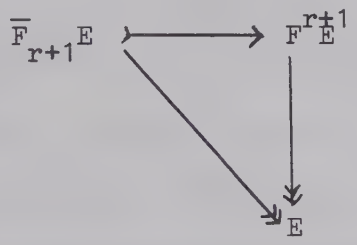
Si r = 1, on retrouve évidemment les définitions du paragraphe 1.

Pour r > 1, des exemples de F^r-objets et F^r-connexions sont fournis par ceux analysés au § 1 en substituant F^r à F. On déduit aussi de la remarque de (II,2,b, (ii)) que le support $\overline{F}_{r+1}E$ du prolongement semi-holonome d'ordre r du F-objet trivial

$E^{(1)}$:



est le support du F^{r+1}-objet de base E, noté $\overline{E}^{(r)}$ suivant :



Il est à remarquer que dans l'exemple 3 (respt. 6), les F^r-connexions sont les surconnexions de Libermann ($[L_2]$) (respt. foncteurs surconnexions de ($[L_4]$)).

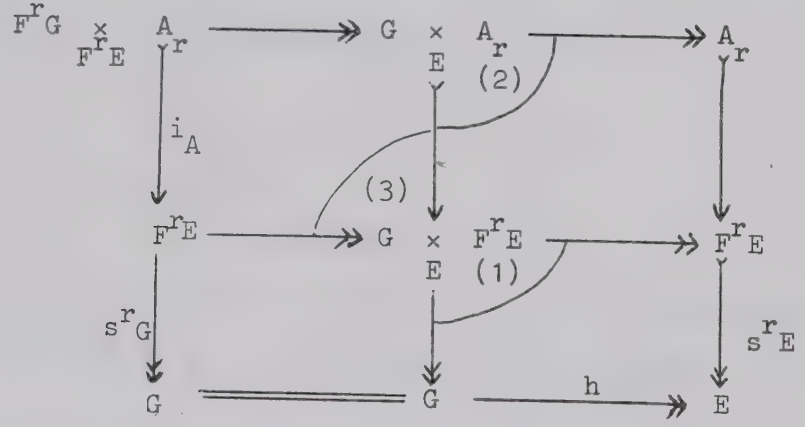
b) Image réciproque d'un F-objet

Proposition 11

Soit $h : G \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow E$ un $\mathcal{S}$-morphisme. Tout F^r-objet A de base E détermine un F^r-objet h^*A de base G et un $\mathcal{S}^{(r)}$-morphisme de h^*A vers A.

Remarquons d'abord qu'en considérant $(\mathcal{C}, F^r)$ comme une catégorie à prolongement (cf. prop. 7) et en appliquant l'axiome "prolo" correspondant, la flèche

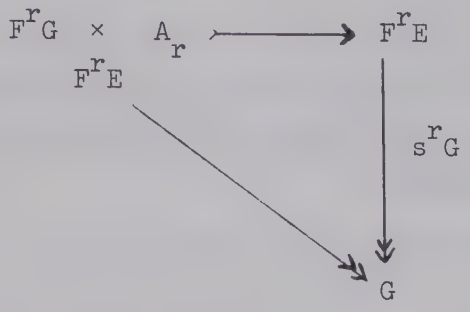
$(s^rG, F^rh) : F^rG \longrightarrow G \underset{E}{\times} F^rE$ est dans $\mathcal{S}$; d'où le diagramme commutatif suivant :



les carrés commutatifs (1), (1) ⊟ (2) et (2) □□ (3) (cf. I,1,e) sont cartésiens par construction, donc aussi (prop. 3), (2) et (3), car la flèche $q_A = s^rE \cdot i_A$ est un $\mathcal{S}$-morphisme. On déduit en appliquant l'axiome de transversablité : d'abord à (1) que $G \underset{E}{\times} F^rE \rightarrow F^rE$ et $G \underset{E}{\times} F^rE \rightarrow G$ sont dans $\mathcal{S}$; ensuite l'appliquant à (1) ⊟ (2) que $G \underset{E}{\times} A_r \rightarrow G \underset{E}{\times} F^rE$ est un $\mathcal{J}$-morphisme ; après à (3) que

$F^rG \underset{F^rE}{\times} A_r \to G \underset{E}{\times} A_r$ est un $\mathcal{G}$-morphisme , et $F^rG \underset{F^rE}{\times} A_r \to F^rG$ un $\mathcal{J}$-morphisme. Donc $(F^rG \underset{F^rG}{\times} A_r \to G) = (F^rG \underset{F^rG}{\times} A_r \to G \underset{E}{\times} A_r \to G)$ est une flèche de $\mathcal{G}$. $(h^* A)$ sera le F^r-objet au-dessus de G suivant :

$(h^*A) =$



Définition

(h^*A) est appelé image réciproque de A par h.

Propriétés des images réciproques

1°) Si h et k sont deux $\mathcal{G}$-morphismes composables, alors pour tout F^r-objets tel que h^*A soit défini, $k^*(h^*A) = (hk)^*A$.

2°) Si h^*A est une F-connexion, il en est de même de A : car alors $F^rG \underset{F^rE}{\times} A_r \to A \underset{E}{\times} A_r$ sera dans $\mathcal{J}$ (d'après l'axiome de stabilité), donc un isomorphisme ; par suite $G \underset{E}{\times} A_r \to G$ est aussi un isomorphisme et $A_r \to E$ est dans $\mathcal{J}$ (propriété de diagramme cartésien), donc un isomorphisme.

La réciproque du 2°) est en général fausse.

c) Sous-catégorie $\mathcal{J}_o$ et F-objets canoniques

(i) Définition de $\mathcal{J}_o$

Regardons d'un peu plus près les exemples de catégories à prolongement déjà cités. Si $\mathcal{J}'$ est la sous-catégorie de $\mathcal{J}$ formée de plongements de sous-variétés, on observe que :

Si f est une surmersion, g un plongement, il existe un unique plongement g' de $\mathcal{J}'$, une unique surmersion f' telles que gf = g'f' : l'image de g est munie canoniquement d'une structure de sous-variété plongée et g' est l'inclusion.

On peut aussi remarquer que l'on a, dans chaque cas, un foncteur d'oubli de $\mathcal{C}$ vers la catégorie Ens des applications ensemblistes qui permet de "remonter" certaines propriétés de Ens. Plus précisément ce foncteur envoie $\mathcal{J}$ vers les injections et $\mathcal{J}'$ vers les inclusions de sous-ensembles.

Cette première analyse nous suggère l'introduction, dans notre catégorie $\mathcal{C}$, de l'hypothèse suivante vérifiée dans les exemples :

Il existe une sous-catégorie $\mathcal{J}_o$ de $\mathcal{J}$ formée de monomorphismes et satisfaisant en plus aux conditions suivantes :

1°) il existe au plus une flèche de $\mathcal{J}_o$ de source et but donnés,

2°) toute flèche de $\mathcal{J}\mathcal{F}$ admet une décomposition de la forme $\mathcal{J}_o\,\mathcal{F}$.

Pour simplifier le langage et éviter les complications inutiles d'ordre logique, nous supposerons également que l'on a un foncteur d'oubli de $\mathcal{C}$ vers Ens envoyant $\mathcal{J}_o$ vers les inclusions de sous-ensembles.

Nous pouvons déjà tirer les conséquences suivantes découlant de cette hypothèse :

(i) La décomposition du 2°) est nécessairement unique en vertu du 1°).

(ii) Tout $\mathcal{J}$-morphisme f est de la forme f = hk où h est un $\mathcal{J}_o$-morphisme et k un isomorphisme (axiome de stabilité à la source).

Les flèches de $\mathcal{J}_o$ seront représentées par $\hookrightarrow$.

Définitions

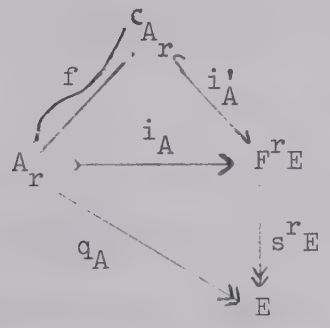
1) Soient A et B deux F^r-objets de même base E, de supports respectifs A_r et B_r. On dit que A est un sous-objet de B s'il existe un $\mathcal{C}^{(r)}$-morphisme (§ 3,a) $(1_E, f)$ où $f \in \mathcal{J}_o$, de A vers B.

Il y a transitivité des sous-objets.

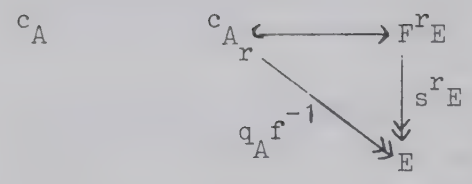
2) Un F^r-objet A est dit sous-forme canonique (ou plus brièvement canonique), si $i_A \in \mathcal{J}_o$: il revient au même de dire que A est un sous-objet de l'objet trivial $E^{(r)}$ (cf. a).

(ii) F-objet canonique

Soit A un F^r-objet. D'après les propriétés de $\mathcal{J}_o$ et l'axiome de stabilité, $i_A = i'_A \cdot f$ où f est un isomorphisme et i'_A une flèche de $\mathcal{J}_o$ d'où le diagramme commutatif.



duquel on déduit le F^r-objet canonique suivant :

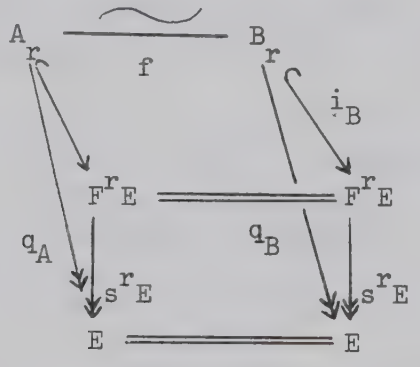


Compte tenu de l'unicité de la décomposition de i_A, tout F^r-objet A détermine un unique F^r-objet canonique noté ^cA, et que nous appelerons forme canonique de A. A et ^cA sont E-isomorphes.

Remarques

L'importance de la forme canonique est soulignée dans les observations suivantes :

1°) Deux F^r-objets canoniques A et B de même base E et E-isomorphes coïncident : on a en effet le diagramme commutatif suivant :



$i_A \cdot 1_{A_r} = i_B.f$ sont deux décompositions du $\mathcal{J}_o$-morphisme i_A sous la forme $\mathcal{J}_o\mathcal{S}$; donc par unicité, $f = 1_{A_r}$ et $i_A = i_B$.

2°) Si $g \in \mathcal{J}_o$, alors $gf \in \mathcal{J}_o$ si et seulement si f est un $\mathcal{J}_o$-morphisme : en effet si $gf \in \mathcal{J}_o$, alors $f \in \mathcal{J}$ d'après la stabilité à gauche ; donc $f = u\,v$ où $u \in \mathcal{J}_o$ et v un isomorphisme ; alors

$gf = (g\ u)v$ et par unicité de décomposition $v = id.$ et $f = u \in \mathcal{J}_o$; la réciproque est claire.

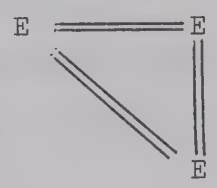
3°) Deux F^r-objets A et B de même base E, de formes canoniques respectives ${}^cA$ et ${}^cB$ sont E-isomorphes si et seulement si ${}^cA = {}^cB$: par construction même de ${}^cA$ (respt ${}^cB$), A et ${}^cA$ (respt B et ${}^cB$) sont E-isomorphes ; donc si ${}^cA = {}^cB$, A et B sont E-isomorphes. Inversement si A et B sont E-isomorphes, il en est de même de ${}^cA$ et ${}^cB$ qui sont égaux d'après 1°).

4°) Un F^r-objet A est une F^r-connexion si et seulement si sa forme canonique en est une.

5°) Tout F-objet canonique est uniquement déterminé par son ordre et son support avec lequel nous le confondrons souvent.

6°) Pour tout objet E de $\mathcal{C}$, le seul F^o-objet canonique de base E est le F^o-objet :

$$E^{(o)}$$



7°) Une F^r-connexion canonique s'identifie à une seule section de s^rE.

L'introduction de la notion de F-objet canonique a pour avantage essentiel de n'étudier les F-objets qu'à isomorphismes près dans la mesure, bien entendu, où cela ne présente pas un inconvénient majeur. La plupart des démonstrations n'en seront d'ailleurs que plus claires et légères.

Par conséquent :

lorsque nous parlerons d'un F-objet il s'agira toujours de sa forme canonique. Si le contexte l'exige, pour un F-objet quelconque A, nous noterons ${}^{c}A$ sa forme canonique.

Remarques et notations :

1°) Soient E un objet de $\mathcal{C}$, r un entier ≥ 0. Les F^r-objets canoniques de base E forment un ensemble (grâce au foncteur d'oubli) ; les F^r-connexions en sont un sous-ensemble.

2°) Pour tout objet E de $\mathcal{C}$, les F-objets canoniques de base E forment un ensemble noté $\psi(E)$; les F-connexions en sont un sous-ensemble noté $\Gamma(E)$.

3°) Les hypothèses rajoutées permettent de traduire la propriété 1°) à la fin de la proposition 11 en disant que l'on détermine un foncteur contravariant de $\mathcal{F}^{(r)}$ (cf a) vers Ens en associant à tout objet E de $\mathcal{C}$ l'ensemble $\psi(E)$.

d) Une caractérisation des F-connexions

On se propose de caractériser, au moins sous certaines conditions, les F-connexions parmi les F-objets.

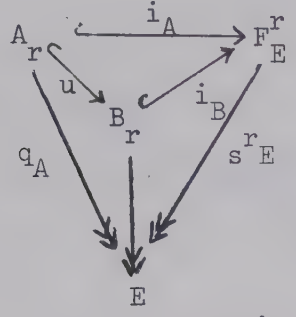
Soit E un objet de $\mathcal{C}$.

Définition

Soient A et B deux F-objets de base E. On dira que A α B si A est un sous-objet de B.

Si donc A α B, on a un $\mathcal{J}_o$-morphisme $u : A_r \longleftarrow B_r$, d'où les

deux $\mathcal{J}_o$-morphismes (de source A_r et but F^rE) i_A et i_Bu qui sont nécessairement égaux (d'après la condition 1°) de $\mathcal{J}_o$. On a alors le diagramme commutatif :



La relation α est une relation d'ordre sur $\psi(E)$: l'antisymétrie se voit en utilisant la condition 1°) de $\mathcal{J}_o$ qui implique en particulier que le seul $\mathcal{J}_o$-morphisme de source et but égaux est l'identité.

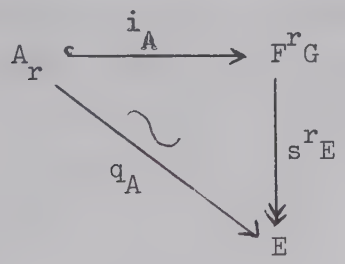
Nous avons

Proposition 12

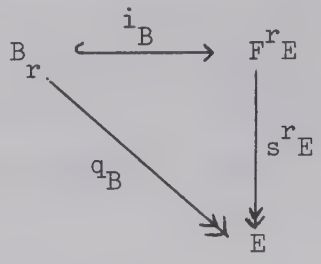
Soit E un objet de $\mathcal{C}$. Toute F-connexion est un F-objet minimal de $\psi(E)$ pour la relation d'ordre α .

Soient en effet A une F^r-connexion, B un F^r-objet tel que B α A.

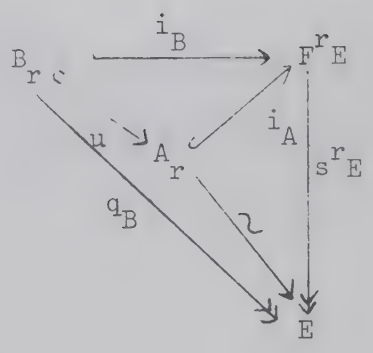
A :



B :



Il existe alors un $\mathcal{J}_o$-morphisme u : B $\hookrightarrow A_r$ rendant commutatif le diagramme suivant :



q_A étant un isomorphisme, $q_B = q_A \cdot u$ est un $\mathcal{J}$-morphisme, donc un isomorphisme, donc u aussi ; par suite les deux F-objets canoniques A et B sont E-isomorphes, donc égaux.

Définition

Soient f et g deux $\mathcal{S}$-morphismes on dira que g majore f ($f < g$) s'il existe deux $\mathcal{J}_o$-morphismes u et v tels que $gu = vf$.

C'est une relation d'ordre entre flèches de $\mathcal{S}$.

Considérons un objet E de $\mathcal{C}$ vérifiant la condition suivante :

Sec_E | *Toute flèche de $\mathcal{S}$ majorée par une flèche de la forme s^mE est inversible à droite.*

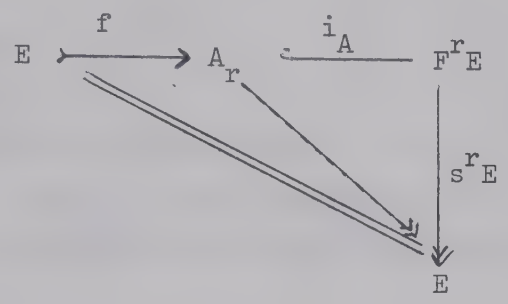
Cette condition est vérifiée dans l'exemple 3 dès que la base est paracompacte, et dans l'exemple 4 pour les fibrés principaux à base paracompacte. En revanche elle ne l'est plus dans l'exemple 5, contrairement à ce qui avait été annoncé dans [PW] .

Dans l'hypothèse Sec_E nous avons

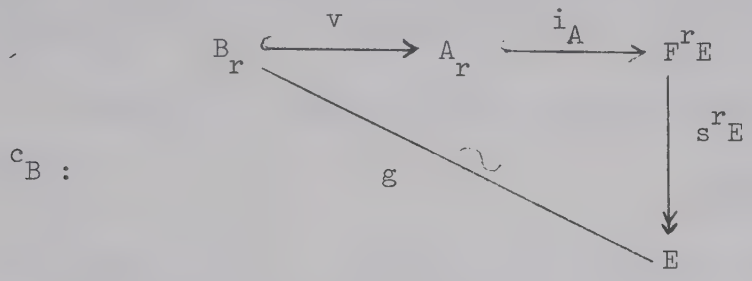
Proposition 19'

Un F-objet de $\psi(E)$ est minimal si et seulement si c'est une F-connexion.

En effet, si A est un F-objet minimal, q_A est majorée par $s^r E$, donc admet un inverse à droite f (d'après SEC_E) ; f est un $\mathcal{J}$ -morphisme (axiome de stabilité à la source). Considérons alors le F-objet non nécessairement canonique B de support E suivant :



le $\mathcal{J}$-morphisme f s'écrit f = v g où g est un isomorphisme $E \longrightarrow B_r$ et v un $\mathcal{J}_o$-morphisme ; d'où le F-objet canonique de support B_r



(qui est d'ailleurs égal à la forme canonique de B, d'où la notation) ; on a manifestement $^cB \ \alpha \ A$ et comme A est minimal, $A = {}^cB$ et $q_A = g^{-1}$.

III - COMPOSITION DES F-OBJETS

Dans tout ce chapitre, on se fixe un objet E de $\mathcal{C}$. On définit et étudie alors une loi de composition sur l'ensemble $\psi(E)$ des F-objets de base E, loi qui généralise celle sur les connexions d'un fibré principal (I,2,c).

Les $\mathcal{J}$-morphismes (respt $\mathcal{J}_o$-morphismes, $\mathcal{S}$-morphismes, isomorphismes) continueront à être représentées par $\longmapsto$ (respt. $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$, $\simeq$). Nous insistons également sur le fait que tout F-objet sera sous-entendu sous sa forme canonique (II,3,c), (donc pourra être parfois confondu avec son support).

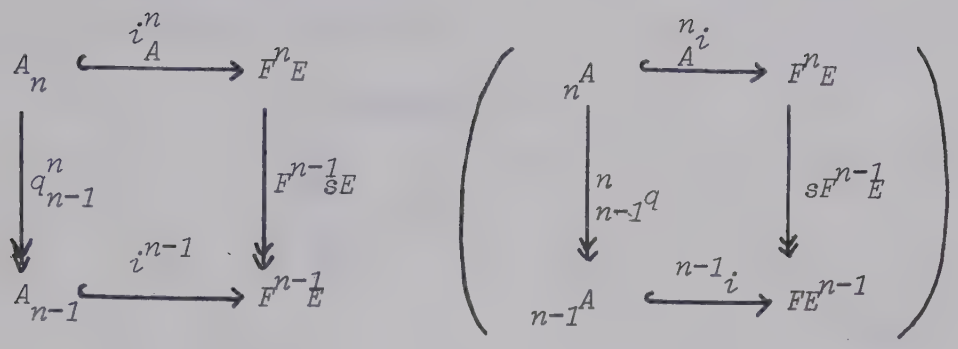
1 - F-OBJETS TRONQUABLES

Dans les exemples 2 à 4, on sait que si R_q est un système différentiel (linéaire ou non) d'ordre q, pour tout $p < q$, ses différentes projections dans J^pE ne sont plus nécessairement des systèmes différentiels. Dans l'exemple (5), les projections canoniques d'une G-structure d'ordre supérieur ($[Y]$), ne sont plus en général des G-structures.

Cette remarque nous conduit à poser, dans notre catégorie $\mathcal{C}$, les définitions suivantes :

Définitions

1) Un F^r-objet A de base E est dit tronquable à droite (respt. à gauche) si pour tout entier n, $0 < n \leqslant r$ il existe un diagramme commutatif de la forme :



avec $i_A^r = i_A$ *(resp.* ${}^r i_A = i_A)$, $i_A^\circ = {}^\circ i_A = 1_E$.

2) A est dit <u>tronquable</u> s'il l'est à droite et à gauche.

En pratique, la condition de "tronquabilité" est essentiellement une hypothèse de "régularité" comme dans les exemples de $[L_4]$, ou de $[Y]$.

Remarquons cependant que si A est tronquable, en général on n'a pas ${}^n_{n-1}q \ . \ q^n_{n-1} = 1$.

<u>Exemples de F-objets tronquables</u>

1°) Tout F-objet d'ordre un est trivialement tronquable.

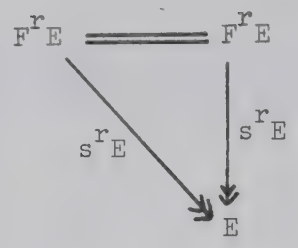
2°) Toute F^r-connexion est tronquable : soit A une F^r-connexion ; elle est définie comme une F^r-connexion canonique associée à une section f de $s^r E$. Il suffit alors de prendre, pour tout $n < r$, les formes canoniques des F-objets ainsi définis :

$$A_n = {}_nA = A_{n-1} = {}_{n-1}A = E, \qquad q^n_{n-1} = {}^n_{n-1}q = 1_E$$

$$i^n_A = F^n(s^{r-n}E) \ . \ i_A \ . \ q_A^{-1} \ ; \qquad {}^n i_A = s^{r-n} F^n E \ . \ i_A \ . \ q_A^{-1}$$

3°) Le F^r-objet trivial

$E^{(r)}$



est tronquable et pour tout $n < r$, ${}_nE^{(r)} = E^{(r)}_n = F^nE$.

4°) Le prolongement semi-holonome d'ordre r du F-objet $E^{(1)}$ définit un F^r-objet tronquable $\overline{E}^{(r)}$ (cf. remarque prop. 9) et pour tout

$$n < r, \qquad {}_n\overline{E}^{(r)} = \overline{E}^{(r)}{}_n = \overline{F}_{n+1}E$$

5°) Le prolongement non holonome d'ordre r d'un F-objet A d'ordre un, définit un F^r-objet tronquable à droite $A^{(r)}$ (cf. remarque de (II,2,b, (i)) : pour tout $n < r$, $A^{(r)}{}_n = A^{(n)}$. De même $\overline{A}^{(r)}$ définit un F^{r+1}-objet tronquable (prop. 9 et 10).

Notations

Pour un objet E de $\mathcal{C}$, nous noterons :

$\psi(E)$ l'ensemble des F-objets de base E

$\Gamma(E)$ l'ensemble des F-connexions de base E

ϕ_E les éléments de $\psi(E)$ tronquables à droite,

${}_E\phi$ les éléments de $\psi(E)$ tronquables à gauche,

$\phi(E)$ les éléments tronquables de $\psi(E)$.

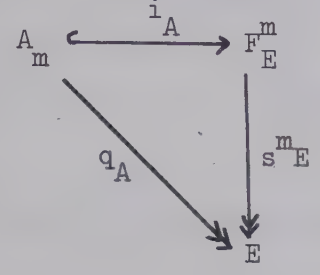
Pour tous entiers p, r tels que $p \leq r$, nous poserons

$$Es^r_p = F^p(s^{r-p}E) , \qquad {}^r_psE = s^{r-p}(F^pE)$$

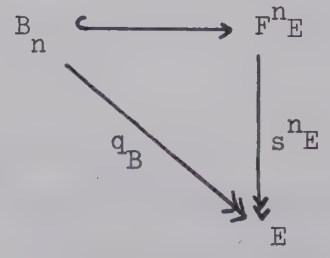
2 - LOI DE COMPOSITION SUR $\psi(E)$

Soient A et B des éléments de $\psi(E)$ d'ordres respectifs m et n, c'est-à-dire :

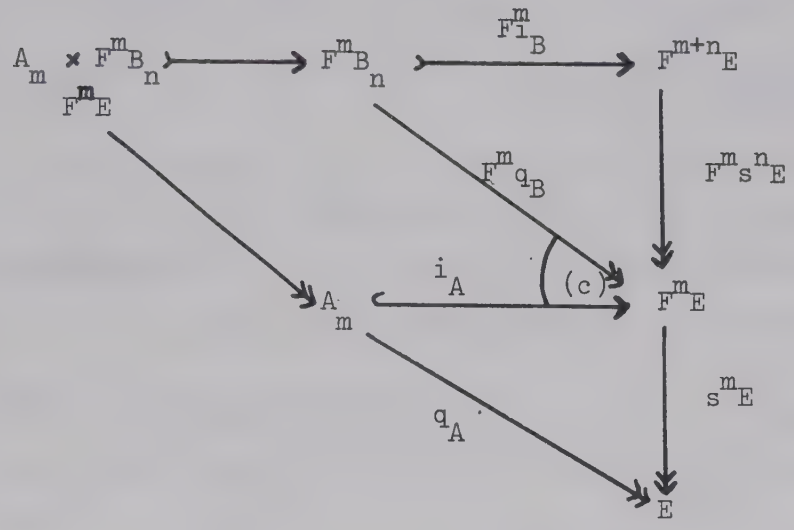
A :



; B =



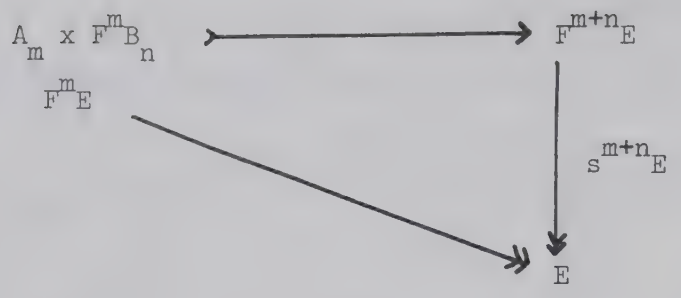
Nous pouvons former le diagramme commutatif suivant :



dans lequel le carré (c) est cartésien par construction ; donc

$A_m \times_{F^m E} F^m B_n \longrightarrow F^m B_n$ est un $\mathcal{J}$-morphisme et

$A_m \times_{F^m E} F^m B_n \longrightarrow A_m$ un $\mathcal{S}$-morphisme. Nous déduisons alors le diagramme commutatif :



(car $s^m E.F^m s^n E = s^{m+n}E$ (cf. I,1,c)), qui est un F^{m+n}-objet non nécessairement canonique.

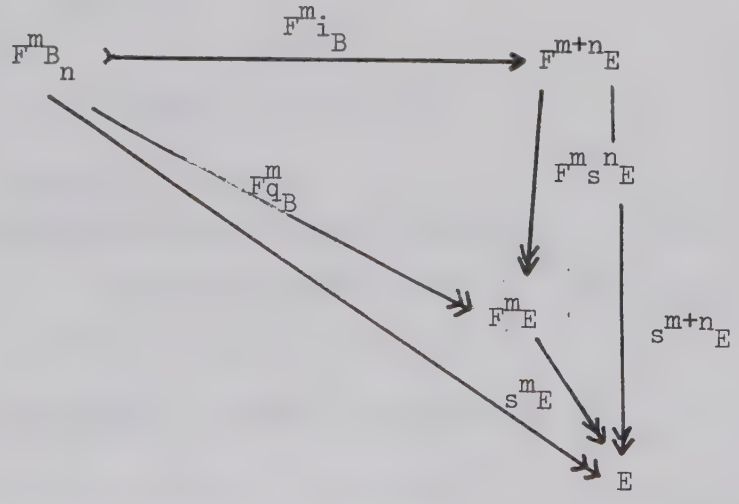
Définition

On appellera composé de A et B la forme canonique du F^{m+n}-objet obtenu ci-dessus.

Nous le noterons B ✱ A.

Remarque

1) Notons $F^m B$ le F^{m+n}-objet de support $F^m B_m$ donné par le diagramme suivant (extrait du diagramme définissant B ✱ A) :



il résulte de la définition de la loi "✱" que si A est le F^m-objet trivial $E^{(m)}$, la flèche $A_m \underset{F^m E}{\times} F^m B_n \longrightarrow F^m B_n$ est un isomorphisme.

Par suite on a :

$$c(F^m B) = B \ast E^{(m)} .$$

2) Si A et B sont des F-connexions définies par des sections f et g respectivement, B $*$ A est la F-connexion définie par la section $F^m g$. f de $s^{m+n}E$: $\Gamma(E)$ est donc stable pour la loi "$*$".

Notation-définition

Soit B un F-objet tronquable à gauche et posons $A = {}_1B$. $B^{(1)} = B * A$ *est appelé premier prolongement d'Ehresmann de B. Par récurrence sur* $r \geqslant 1$, *on définit le prolongement d'Ehresmann d'ordre r de B par* $B^{(r)} = B^{(r-1)} * A$.

Dans l'exemple (4) ou (4') et si E est un fibré principal P, on retrouve la loi de composition sur l'ensemble des connexions sur P définie par Kolář et rappelée en (I,2,c), et grâce à la proposition 6, celle introduite par Virsik dans $[VI_2]$, sur les connexions sur un groupoïde $\mathcal{G}$-transitif, dans le cas particulier où le facteur de droite est d'ordre un. Nous avons donc une bonne généralisation de la loi de composition sur les connexions principales.

3 - PROPRIETES DE LA LOI DE COMPOSITION

En (II,3,c), nous avons introduit une relation d'ordre notée α sur $\psi(E)$. Nous avons :

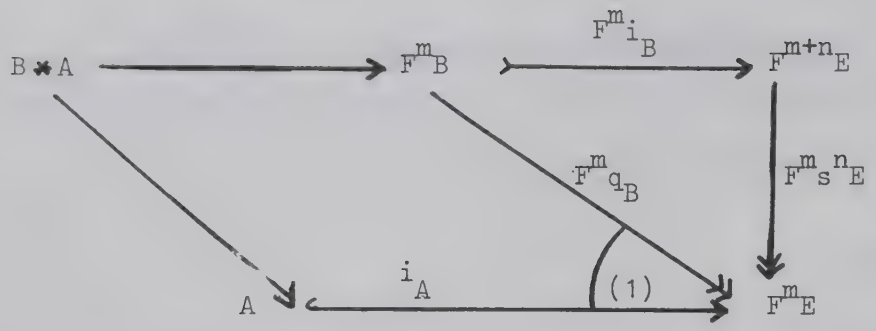
Proposition 13

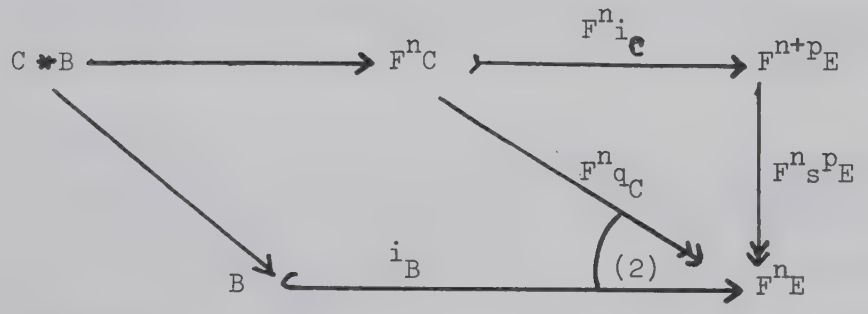
Soit E un objet de $\mathcal{G}$. *Alors :*

1) la loi $*$ *est associative et admet pour élément neutre* $E^{(o)}$.

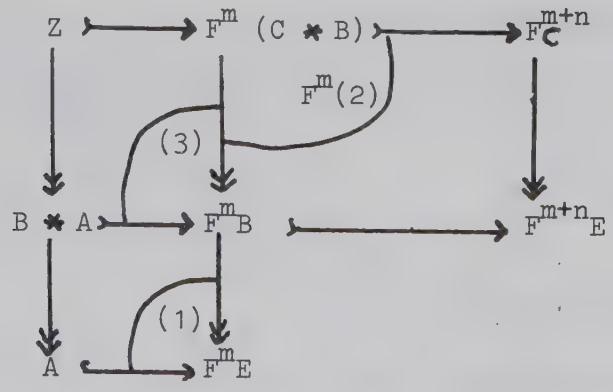
2) la loi $*$ *est compatible avec la relation d'ordre* α .

Soient en effet A,B et C des F-objets d'ordres respectifs m, n et p ; notons (1) et (2) les carrés cartésiens suivants qui définissent B $*$ A et C $*$ B :





appliquons F^m à (2) et posons $Z = (B * A) \underset{F^m B}{\times} F^m (C * B)$ nous avons alors le diagramme commutatif suivant :

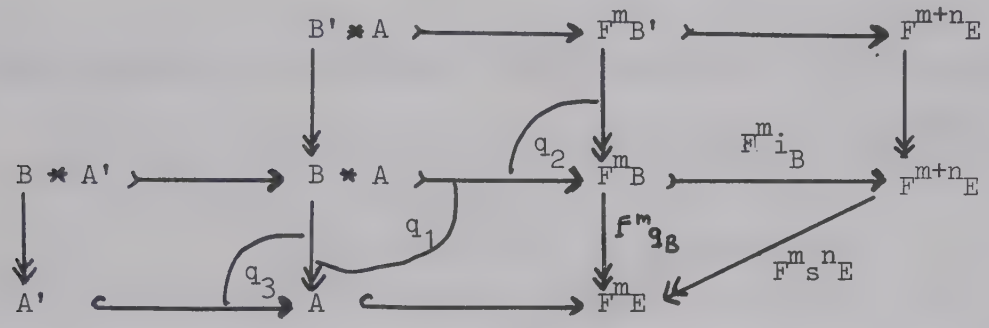


où les carrés (1) et (3) sont cartésiens par construction, donc aussi (1) ⊟ (3) (prop. 3) et alors $Z \simeq A \underset{F^m E}{\times} F^m(C * B)$; F^m étant compatible avec le produit fibré, $F^m(2)$ est cartésien, donc aussi $(F)^m(2)$ ⊟ (3);

par suite $Z \simeq (B * A) \times_{F^{m+n}_E} F^{m+n}_C$.

$C * (B * A)$ et $(C * B) * A$ sont du même ordre $m + n + p$ et ont des supports isomorphes à Z, donc sont égaux.

Pour démontrer la 2ème partie de la proposition, soient $A' \alpha A$, $B' \alpha B$; montrons que $(B' * A) \alpha (B * A)$ et $(B * A') \alpha (B * A)$; pour cela considérons le diagramme commutatif suivant :



où les carrés commutatifs q_1, q_1 ⊟ q_2 et q_1 ⊡ q_3 sont cartésiens par construction, d'où aussi (prop. 3) q_2 et q_3 . $B * A' \longrightarrow F^{m+n}_E$ et $B * A \longrightarrow F^{m+n}_E$ sont dans $\mathcal{J}_o$, donc aussi $B * A' \longrightarrow B * A$ (remarque 1° de 3,c). De même $B' * A \longrightarrow B * A$ est dans $\mathcal{J}_o$. Par suite $(B * A') \alpha (B * A)$ et $(B' * A) \alpha (B * A)$. On déduit que $(B' * A') \alpha (B * A') \alpha (B * A)$.

Corollaire

$F^p(B * A) = B * F^p A$: *car* $F^p(B * A) = (B * A) * F^p E$

$= B * (A * F^p E)$

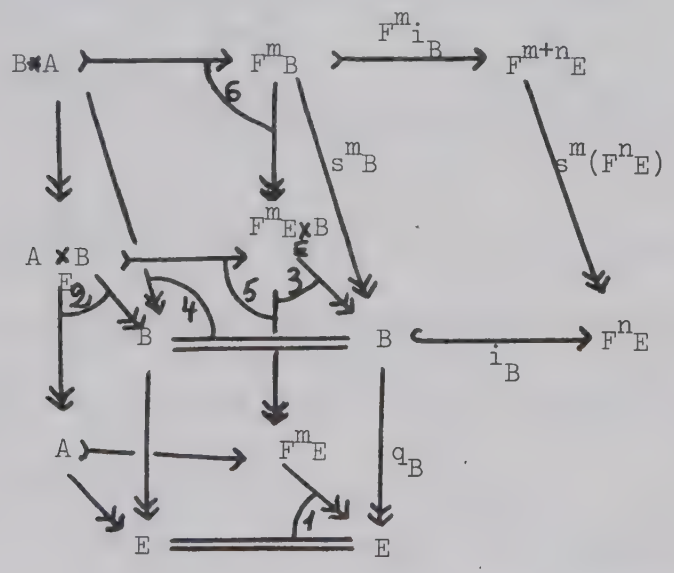
Proposition 14

Soient A et B deux F-objets d'ordres respectifs m et n. Les projections naturelles de B ✱ A vers A ou B sont dans $\mathcal{S}$ et sont majorées respectivement par

$$F^n(s^m E) \quad \text{et} \quad s^m(F^n E) \ .$$

Le cas de la projection de B ✱ A vers A a déjà été établi lors de la définition même de B ✱ A en utilisant la stabilité de $\mathcal{S}$ par F^m et l'axiome de transversabilité.

Pour la suite de la démonstration, considérons le diagramme commutatif suivant :



les quatuors (2), (3) et de "face" sont cartésiens par construction, d'où aussi (5) (cor. prop. 3) et donc (6) (Prop. 3). La flèche $F^m B \longrightarrow B \underset{E}{\times} F^m E$ étant dans $\mathcal{S}$ (d'après l'axiome prolo), il en est de même de $B ✱ A \longrightarrow A \underset{E}{\times} B$

et donc de $B * A \longrightarrow B$. Cette dernière flèche est de façon évidente majorée par $\binom{m+n}{n} sE$.

Corollaire 1

$B * A$ détermine un F^m-objet non nécessairement canonique de base B (et de même support que $B * A$).

Cet F-objet est d'ailleurs égal à l'image réciproque $q_B^* A$ de A par q_B (cf. II,3,b).

Corollaire 2

Si A' et B' sont des F-objets d'ordres respectifs m et n, alors $B' * A' = B * A$ implique $A = A'$ et $B = B'$.

En effet, sinon la flèche $B * A \longrightarrow F^m E$ (respt. $B * A \longrightarrow F^n E$) admettrait deux factorisations de la forme $\mathcal{J} \circ \mathcal{S}$ à travers A et A' (respt. B et B').

Corollaire 3

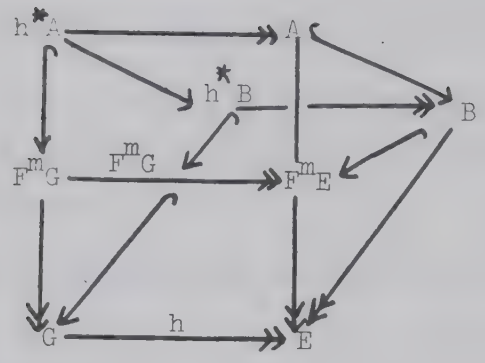
$(\Psi(E), *)$ est un semi-groupe ordonné.

Le corollaire 2 entraîne la simplification à droite et à gauche car par exemple si $B' * A = B * A$, alors ordre (B') = ordre (B).

Proposition 15

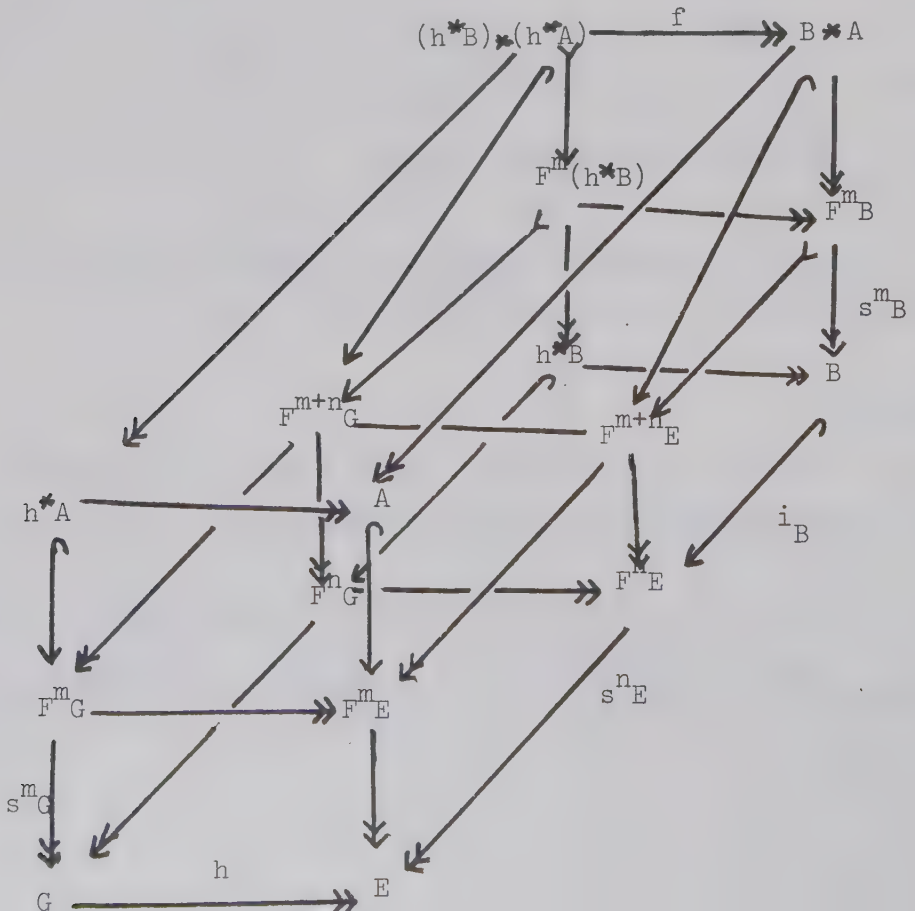
Soit $h : G \longrightarrow E$ un $\mathcal{S}$-morphisme. Alors h induit un morphisme de semi-groupe ordonné h^* de $\Psi(E)$ dans $\Psi(G)$.

Pour tout F-objet A de $\Psi(E)$, $h^* A$ est défini comme étant la forme canonique de l'image réciproque de A par h [II,3,b] . D'autre part si A et B sont des F^m-objets de base E tels que $A \alpha B$, nous avons le diagramme commutatif suivant :

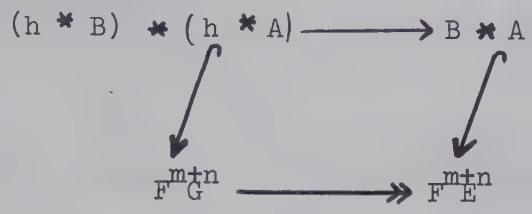


la flèche $h * A \longrightarrow h * B$ se déduit des propriétés de diagramme cartésien donnant $h * B$; elle est dans $\mathcal{J}_o$ car $h * A \hookrightarrow F^m G$ et $h * B \hookrightarrow F^m G$ et on applique la remarque 2°) de (II,3,c) ; donc $h * A \ \alpha \ h * B$.

Considérons maintenant deux F-objets de base E, d'ordres respectifs m et n, et montrons que $(h * B) * (h * A) = h * (B * A)$. En construisant $B * A$, $h * A$, $h * B$ et $(h * B) * (h * A)$ sur la même figure, nous obtenons le diagramme commutatif suivant :



le morphisme f provient de la construction de B * A. Pour établir l'égalité annoncée, et compte tenu de la construction de h * (B * A), il suffit de montrer que le diagramme



est cartésien, ce qui se fait sans peine.

Proposition 16

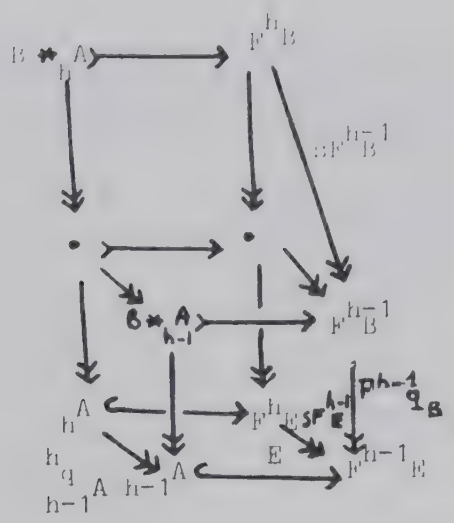
*Si A et B sont des F-objets tronquables à droite (respt. à gauche), il en est de même de C = B * A et on a :*

$C_h = A_h$ (1) ; $C_{m+k} = B_k * A$ (2) ;

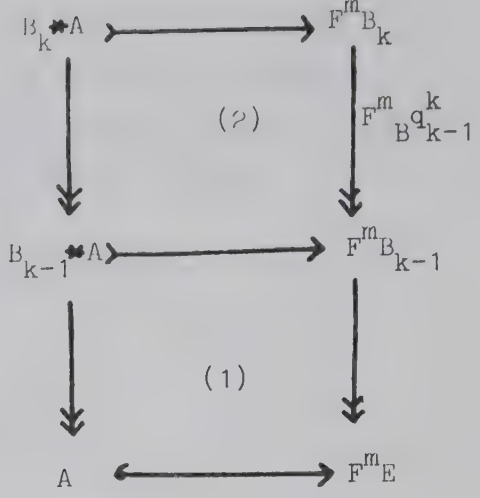
${}_kC = {}_kB$ (3) ; ${}_{n+h}C = B *_h A$ (4) ,

pour tous h et k tels que $0 \leqslant h \leqslant m$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

Les égalités (1) et (3) sont évidentes en vertu de la proposition 14 ; pour démontrer (2), on n'a qu'à considérer le diagramme commutatif I ci-après, où les points désignent des produits fibrés. Le reste de la démonstration se fait comme dans la proposition 14. Quant à (4), elle se déduit du diagramme (II) dans lequel les quatuors (1) et (1) ⊟ (2) sont cartésiens par construction, donc aussi (2) et par suite la flèche $B_k * A \longrightarrow B_{k-1} * A$ est un $\mathcal{S}$-morphisme.



(I)



(II)

La proposition 16 implique notamment que les ensembles $\phi(E)$, ϕ_E et ${}_E\phi$ sont stables pour la loi "$*$".

4 - F-OBJETS DECOMPOSABLES

Définitions

(i) un F-objet C est dit décomposable, s'il existe deux F-objets A et B différents de $E^{(o)}$ tels que $C = B * A$.

(ii) un F-objet est dit irréductible s'il est différent de $E^{(o)}$ et s'il n'est pas décomposable.

(iii) un F-objet C admet une décomposition irréductible s'il existe des F-objets irréductibles $A^1,\ldots,A^n$, tels que $C = A^1 * \ldots * A^n$.

$E^{(o)}$ n'est ni décomposable, ni irréductible.

Un F-objet irréductible est d'ordre > 0 ; un F-objet décomposable est d'ordre ≥ 2 ; tout F-objet d'ordre un est irréductible.

Lemme 1

*Soient A, B, A', B' des F-objets tronquables à droite (respt. à gauche, respt. tronquables) d'ordres respectifs m, n m' = m+k et n' = n-k (k ⩾ 0), tels que B * A = B' * A'. Alors il existe un F-objet C (nécessairement unique) de même nature, d'ordre k tel que A' = C * A et B = B' * C.*

Soient en effet A,B,A',B' vérifiant les hypothèses du lemme :

(i) Si A,B,A',B' sont tronquables à droite, il suffit de prendre $C = B_k$ qui est tronquable à droite en prenant $(B_k)_h = B_h$ pour $h < k$; de la proposition 15, il découle que $A' = (B' * A')_{m'} = (B * A)_{m+k} = B_k * A$; donc $B * A = B' * A' = B' * B_k * A$. $\psi(E)$ étant un semi-groupe (prop. 14, cor. 3), $B = B' * B_k$.

(ii) Si A,B,A',B' sont tronquables à gauche, on opère symétriquement en prenant $C = {}_kA$.

(iii) Si A,B,A' et B' sont tronquables, ils le sont en particulier à droite, donc d'après (i) on a $A' = B_k * A$; de la proposition 15 et comme A' est aussi tronquable à gauche, on a ${}_kA' = {}_k(B_k * A) = B_k$. Il suffit alors de prendre $C = {}_kA' = B_k$ qui est tronquable.

Nous allons préciser davantage les résultats du corollaire 3 de la proposition 14 dans le

Théorème 1

Soit E un objet de $\mathcal{C}$. Tout élément de $\psi(E)$ d'ordre > 0 admet une et une seule décomposition irréductible.

Soit en effet C un élément de $\psi(E)$ d'ordre $m > 0$:

(i) C admet une décomposition irréductible : la démonstration se fait par récurrence sur m. C'est vrai pour m = 1, car si C = B ✱ A, ordre C = ordre A + ordre B, donc A ou B est d'ordre nul, donc égal à $E^{(o)}$; supposons que tout F-objet d'ordre < m admette une décomposition irréductible. Si C n'est pas irréductible on a C = B ✱ A avec ordre B et ordre A < m. D'après la récurrence A et B admettent des décompositions irréductibles donc le produit est une décomposition irréductible de C.

(ii) unicité de la décomposition irréductible : on le montre aussi par récurrence sur m. C'est vrai si m = 1. Supposons l'unicité vraie pour tout F-objet d'ordre < m. Soient deux décompositions irréductibles de C :

$$C = A^1 ✱ \dots ✱ A^n = B^1 ✱ \dots ✱ B^q, \qquad (n \text{ et } q \geq 2)$$

$$= A^1 ✱ A \qquad = B^1 ✱ B$$

où $A = A^2 ✱ \dots ✱ A^n$, $\qquad B = B^2 ✱ \dots ✱ B^q$

d'après le lemme ordre A^1 = ordre $B^1 > 0$, donc $A^1 = B^1$ et A = B ; or ordre A = ordre B < m ; donc d'après la récurrence les facteurs des décompositions irréductibles de A et B sont les mêmes.

5 - ETUDE DES F-OBJETS SEMI-HOLONOMES

On se propose d'étudier de plus près la décomposition des F-objets semi-holonomes. Dans ce but nous ferons désormais l'hypothèse supplémentaire suivante, vérifiée dans tous les exemples que nous avons en vue :

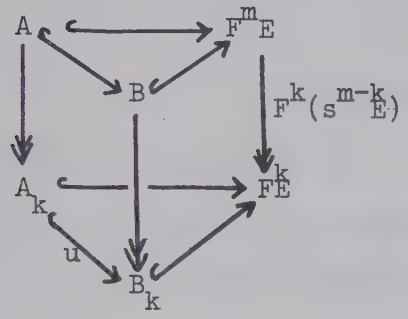
(H) Etant donné trois flèches $f : A \twoheadrightarrow A'$, $g : B \twoheadrightarrow B'$, $h : C \twoheadrightarrow C'$ de $\mathcal{S}$, les conditions $f < h$, $g < h$ et $1_A < 1_B$ impliquent $f < g$ (donc $1_{A'} < 1_{B'}$).

La première conséquence de (H) est la :

Proposition 17

Soient A et B deux F^m-objets tronquables à droite (respt. à gauche, respt. tronquables). Si A α B, alors pour tout k $\leqslant$ m, A_k α B_k (respt. ${}_kA$ α ${}_kB$).

Supposons par exemple A et B tronquables à droite. D'après (H), nous déduisons le $\mathcal{J}_o$-morpnisme u, d'où le diagramme commutatif suivant :



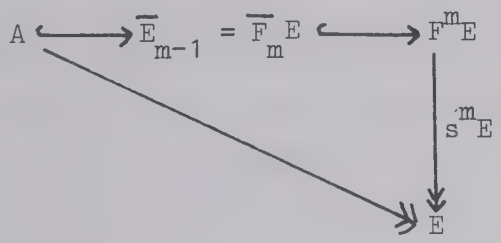
La proposition 17 signifie que le tronquage est compatible avec la relation d'ordre α .

Nous avons signalé en (II,3 a,iii) que le prolongement semi-holonome (II,2,b,(ii)) de l'objet trivial $E^{(1)}$(II,3,a), définit un F^{r+1}-objet noté $\overline{E}^{(r)}$. Nous posons :

Définition

Un F^m-objet A est dit semi-holonome si A α $\overline{E}^{(m-1)}$.

Autrement dit si A est semi-holonome, on a un diagramme commutatif de la forme :



Proposition 18

Soit A un F^m-objet semi-holonome tronquable à droite (respt. à gauche) ; alors pour tout k, $0 \leqslant k \leqslant m$, A_k (respt. ${}_kA$) est semi-holonome et $A_k = {}_kA$.

Soit A un F-objet semi-holonome. La première partie de la démonstration résulte de la proposition 17 en prenant $B = \overline{E}^{(m-1)}$.

L'égalité $A_k = {}_kA$ résulte de l'unicité de la décomposition de la flèche $A \longrightarrow A_k \longrightarrow \overline{E}_{k-1}$. Si $k = 0$, $A_o = {}_oA = E$ d'après la définition de la tronquabilité (II,3,d).

Lemme 2

Soient A et B deux F-objets tronquables d'ordres respectifs m et n. Si $C = B * A$ est semi-holonome, alors A divise B à droite ou bien B divise A à gauche.

Supposons par exemple $m \leqslant n$; d'après la proposition 16, $B = {}_nC$ et $C_n = C_{m+(n-m)} = B_{n-m} * A$; d'après la proposition 16, $C_n = {}_nC$ donc $B = B_{n-m} * A$. Si par contre $n \leqslant m$, on a de la même manière $A = C_m = {}_mC = B *_{m-n} A$.

Théorème 2

Soit C un F-objet semi-holonome. Ou bien C est une puissance d'un F-objet semi-holonome minimal, ou bien C est irréductible.

En effet supposons C décomposable et soit $C = A^1 * \ldots * A^\ell$ la décomposition irréductible de C. Pour $1 \leqslant i \leqslant \ell-1$, posons :

$$p = (i+1) + (i+2) + \ldots + \ell$$

$$q = 1 + 2 + \ldots + (i-1) .$$

D'après la proposition 15,

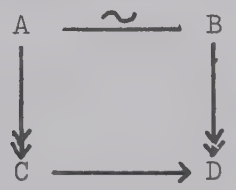
$$C_{p+q} = {}_q(C_p) = A^i * A^{i+1}$$

qui est semi-holonome (prop. 18) ; donc (lemme 2) A^i divise A^{i+1} ou bien A^{i+1} divise A^i ; A^i et A^{i+1} étant irréductibles, $A^i = A^{i+1}$. Donc $A^1 = A^2 = \ldots = A^\ell = A$. Montrons que A est minimal ; soit alors B α A. C étant décomposable, $\ell \geq 2$. D'après la proposition 13, $\left(B * ({}^{\ell-1}_{*}A)\right) \alpha \left({}^{\ell}_{*} A = C\right)$; donc $B * ({}^{\ell-1}_{*} A)$ est semi-holonome et décomposable ; par suite B = A car ordre B = ordre A.

Afin de préciser davantage le théorème 2, nous allons nous placer dans le cadre d'un "diptyque" tel qu'il a été défini dans [P_5] . Nous ne reviendrons pas sur toute cette théorie qui nous entraînerait loin du but de ce travail. Retenons seulement qu'en plus des axiomes de catégorie à prolongement, les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Si g et f g $\in \mathcal{G}$, alors f $\in \mathcal{G}$,

(ii) Si le diagramme



est cartésien, alors C ⟶ D est un isomorphisme.

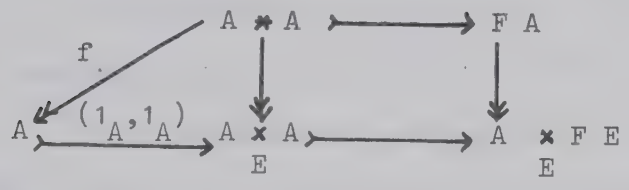
Nous pouvons alors établir :

Lemme 3

*Soit A un F-objet d'ordre un. A * A est semi-holonome si et seulement si A est une F-connexion.*

Rappelons d'abord que $A \overset{*}{} A$ coïncide avec le F^2-objet défini par le prolongement non holonome d'ordre un de A [remarque de II,2,b, (i)] .

Soit donc A une F-connexion d'ordre un. Alors l'application $A \longrightarrow A \underset{E}{\times} A$ est un isomorphisme. Nous déduisons de la construction du prolongement semi-holonome de A [II,2,b, (ii)] , que $A \overset{*}{} A$ est isomorphe à ce dernier, donc semi-holonome. Réciproquement si $A \overset{*}{} A$ est semi-holonome, nous avons le diagramme commutatif suivant :



où f est la projection canonique de $A \overset{*}{} A$ vers A. D'après la propriété (i) de "diptyque" rappelée ci-dessus $(1_A, 1_A)$ est un isomorphisme, donc d'après (ii), A est isomorphe à E.

Grâce aux hypothèses supplémentaires introduites (et qui sont vérifiées dans tous les exemples que nous avons vus), nous pouvons renforcer et préciser le théorème 2 comme suit :

Théorème 3

Soit A un F-objet tronquable d'ordre $m_1 > 1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) A est semi-holonome et décomposable

b) $A = \overset{m}{\overset{*}{}} B$ où $B = {}_1A = A_1$ est une F-connexion d'ordre 1,

c) $A \overset{*}{} A$ est semi-holonome

d) $A^{(1)}$ (cf. 1) est semi-holonome.

Nous ferons la démonstration dans l'ordre

c) $\Longrightarrow$ d) $\Longrightarrow$ a) $\Longrightarrow$ b) $\Longrightarrow$ c)

c) $\Longrightarrow$ d) : d'après la proposition 15 ${}_{m+1}(A * A) = A * {}_1A$, et par définition $A^{(1)} = A * {}_1A = {}_{m+1}(A * A)$; donc (prop. 18), $A^{(1)}$ est semi-holonome.

d) $\Longrightarrow$ a) : d'après la proposition 16 ${}_m(A^{(1)}) = {}_m(A * {}_1A) = A$; donc A est semi-holonome (prop. 18). ${}_1A$ divise A (lemme 2) et non trivialement puisque $m > 1$; donc A est décomposable.

a) $\Longrightarrow$ b) : A étant décomposable et semi-holonome, on a (théorème 2) : $A = \overset{p}{*} B$ avec $p > 1$ et B irréductible d'ordre $q < m$; d'après la proposition 16, $B * B = {}_{2q}\left((B * B) * (\overset{p-2}{*} B)\right) = {}_{2q}A$; B * B est donc semi-holonome (prop. 18) ; on en déduit que $q = 1$, sinon en appliquant c) $\Longrightarrow$ d) $\Longrightarrow$ a) à B, B serait décomposable. B est d'ordre un et tel que B * B est semi-holonome : c'est donc une connexion d'ordre un (lemme 3).

b) $\Longrightarrow$ c) : Montrons par récurrence sur p que $\overset{p}{*} B$ est semi-holonome. Soit alors $f = f^1$ la section de sE définissant B et posons par récurrence $f^p = F(f^{p-1}) \cdot f$; f^p est la section de s^pE définissant $\overset{p}{*} B$. Il suffit alors de montrer que

$$E\, s^p_{p-1} \cdot f^p = {}^p_{p-1}s\, E \cdot f^p$$

Plus précisément montrons par récurrence sur p que

$${}^p_{p-1}s\, E \cdot f^p = E\, s^p_{p-1} \cdot f^p = f^{p-1}$$

ce qui est vrai pour $p = 1$. Supposons que

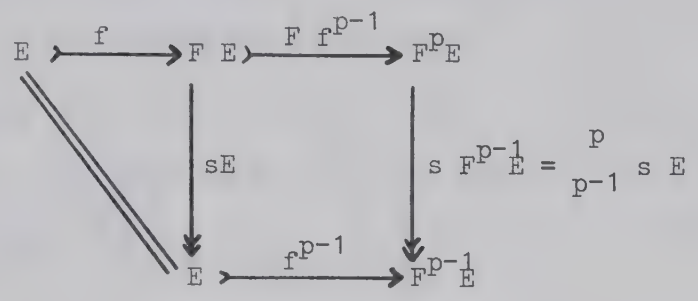
$$ {}^{p-1}_{p-2}s\ E \cdot f^{p-1} = E\, s^{p-1}_{p-2} \cdot f^{p-1} = f^{p-2} $$

On a d'après la récurrence :

$$ E\, s^{p}_{p-1} \cdot f^{p} = F(Es^{p-1}_{p-2}) \cdot F(f^{p-1}) \cdot f = F(Es^{p-1}_{p-2} \cdot f^{p-1}) \cdot f $$

$$ = F(f^{p-2}) \cdot f = f^{p-1} $$

D'autre part, du diagramme commutatif suivant :



on tire :

$$ {}^{p}_{p-1}s\ E \cdot f^{p} = {}^{p}_{p-1}s\ E \cdot F(f^{p-1}).f = f^{p-1} \cdot sE \cdot f = f^{p-1} $$

Remarques

Convenons, en s'inspirant de la terminologie de Virsik [VI$_2$], d'appeler F-objet simple, un F-objet obtenu par prolongement itéré d'une F-connexion d'ordre un.

Une partie du théorème 3 peut alors s'énoncer comme suit :

Corollaire 1

Un F-objet est simple si et seulement si son prolongement d'Ehresmann est semi-holonome.

De même on peut généraliser comme suit le théorème 5 de [VI$_2$] :

Corollaire 2

*Soient A et B deux F-objets. B * A est semi-holonome si et seulement si A et B sont simples et proviennent d'une même F-connexion d'ordre un.*

CONCLUSION

1) La première partie de notre conclusion est la traduction des théorèmes 2 et 3 dans certains des exemples mentionnés en (II,1,b) :

(i) Soit $\mathcal{C}$ la catégorie de B-morphismes de fibrés vectoriels (où B est une variété), E un objet de $\mathcal{C}$(exemple 3 ou 3'). La condition de "tronquabilité" d'un $\mathcal{J}^q$- objet, c'est-à-dire pour un système différentiel non holonome d'ordre q, se traduit simplement par des conditions de rang constant pour certaines projections intermédiaires ; le théorème 3 signifie en particulier que le prolongement non holonome d'un tel système est semi-holonome si et seulement s'il s'obtient par prolongements successifs du système différentiel d'ordre un qu'il définit, et si ce système provient d'une connexion (d'ordre 1).

(ii) Si E est un fibré principal de groupe H dans la catégorie $\mathcal{G}_B(H)$ (I,1), nous avons déjà fait remarquer en (III,2) que la restriction de notre loi de composition sur les connexions $\Gamma(E)$ de E, équivaut à celle introduite partiellement par Virsik dans [VI$_2$] . Lorsque A est un élément de $\Gamma(E)$, nos théorèmes 2 et 3 et leurs corollaires contiennent les théorèmes 1, 5 et 6 de [VI$_2$] . Nous avons donc renforcé ces derniers considérablement sur les points suivants :

1°) on ne suppose pas a priori qu'on part d'une connexion, mais d'un fibré convenable,

2°) On ne suppose pas a priori que les facteurs de la décomposition sont d'ordre un.

Ces deux points sont ici obtenus comme conséquence.

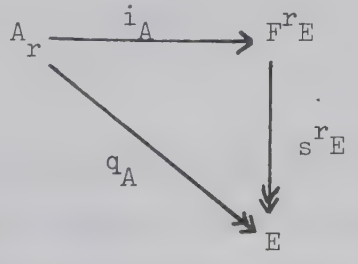
(iii) Si $\mathcal{C}$ est la catégorie de l'exemple 5 ou 5' (II,1,b) et E le fibré nul (B,B, {e}), les F-objets sont les G-structures non holonomes d'ordre supérieur. Les F-connexions pourraient être appelées, en s'inspirant de la terminologie de Molino [MO], des parallélisations semi-holonomes obtenues par prolongements successifs d'une parallélisation absolue (d'ordre un). Le théorème 3 donne ici :

Théorème

Les seules G-structures semi-holonomes d'ordre supérieur vérifiant les hypothèses de "tronquabilité" qui soient décomposables s'obtiennent par prolongement d'une parallélisation absolue d'ordre 1.

2) Une possibilité d'amélioration de ce travail, peut s'envisager en étendant la notion de F-objet. En effet nous avons défini un F^r-objet A comme étant un diagramme commutatif :

A :



on peut "alléger" cette définition par exemple en supposant que q_A est de la forme $\mathcal{TS}$; cela permettrait sans doute d'étudier un champ d'applications plus vaste, allant des G-structures généralisées de [K_6] à d'autres types de systèmes différentiels linéaires ou non, mais englobant ceux cités dans notre travail.

B I B L I O G R A P H I E

BOURBAKI, N.

[B] Variétés différentiables et analytiques. Fascicules des résultats, Hermann, Paris

EHRESMANN, C.

[E_1] Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. Coll. Topol. Bruxelles, 1950

[E_2] Les prolongements d'une variété différentiable. Comptes Rendus Acad. Sc. (CRAS), Paris, t. 233, 1951, p. 598, 777, 1081

[E_3] Extension du calcul des jets aux jets non holonomes. CRAS, t. 239, 1954, p. 1762

[E_4] Application de la notion de jets non holonomes. CRAS, t. 240, 1955, p. 397

[E_5] Les prolongements d'un espace fibré différentiable. CRAS, t. 240, 1955, p. 1755

[E_6] Catégories topologiques et catégories différentiables. Coll. Géom. Diff. Globale, Bruxelles, 1959

[E_7] Sur les connexions d'ordre supérieur. ATTI dell Unione Mat. Ital., Pavia-Torino, 1956

[E_8] Prolongements de catégories différentiables. Cahier Topol. et Géom. Diff., 1964, Vol. VI

[E_9] Catégories et structures. 1964, Dunod, Paris

[E_{10}] Propriétés infinitésimales des catégories différentiables. Cahier Topol. et Géom. Diff, 1966, vol. IX

KOLÁŘ, I.

[K_1] On the torsion of spaces with connections.
Czech. Math. J. 21 (96), 1971, p. 124

[K_2] Canonical forms on the prolongations of principal bundles.
Rev. Roum. Math. Pures et Appl., t. XVI, n°7, 1971, p. 1091

[K_3] On the prolongations of differentiable distributions.
Mate. Časopis, 23, (4), 1973, p. 317

[K_4] Some higher order operations with connections.
Czech., Math. J., 1974, p. 311, 24, (99)

[K_5] On some operations with connections.
Math. Nach. Berlin (DDR), 1975

[K_6] Generalized G-structures and G-structures of higher order.
Boll. U.M.I., 4, (12), 1975, p. 245

[K_7] On generalized connections.

LIBERMANN, P.

[L_1] Sur la géométrie des prolongements des espaces fibrés vectoriels.
Ann. Fourier, Grenoble, 1964, p. 145

[L_2] Connexions d'ordre supérieur et tenseurs de structures.
Conv. Int. di Geom. Diff., 1967

[L_3] Prolongements des fibrés principaux et des groupoïdes différentiables.
Sém. Anal. Globale, Montréal, 1969

[L_4] Sur les groupoïdes différentiables et le presque parallélisme.
Istit. Naz. di Alta Mat., Symp. Mat., vol. X, 1972, p. 59

[L_5] On "Fibre parallelism" and locally reduction.

[L_6] Surconnexions et connexions affines spéciales. CRAS, 1965, t. 261, p. 2601

MAC LANE, S.

[Ma] Catégories for the working mathematicians. Springer, 1971

MEWOLI, B.

[Me] Thèse 3ème cycle, Toulouse 1977

MOLINO

[Mo] Théorie des G-structures. Lectures notes, n° 588

PRADINES, J.

[P_o] CRAS, Paris, t. 266, 1968, p. 1194

[P_1] Représentation des jets non holonomes par des morphismes vectoriels doubles soudés. CRAS, t. 278, 1974, p. 1523

[P_2] Fibrés vectoriels doubles symétriques et jet holonome d'ordre 2. CRAS, ibid., p. 1557

[P_3] Suites exactes vectoriels doubles et connexions. Ibid., p. 1587

[P_4] Fibrés vectoriels doubles et jets non holonomes. Esquisses math. n° 27, Amiens, 1977

[P_5] Bulding categories in which a Godement's theorem is available. Cahier Topo. et Géom. Diff., Amiens, 1976

PRADINES, J. ; WOUAFO KAMGA, J.

[P.W] Composition et décomposition irréductibles des objets géométriques d'ordre supérieur. CRAS, t. 280, 1975, p. 125

VER EECKE

[VE_1] Sur les connexions d'éléments de contact. Thèse, 1963, Paris

[VE_2] Calcul des jets. Fasc. 1, Publ. da Soc. Mat. de Sao Paulo, 1967

[VE_3] Introduccion a las conexioes de orden superior. Publ. Dep. Géom. y Topol., Zaragoza, 1968

VIRSIK, J.

[VI_1] On generalized point of view of higher order connections on fibre bundles. Czech. Math. J., 19 (94), 1969, p. 110

[VI_2] On the holonomity of higher order connections. Cahier Topol. et Géom. Diff., vol. XII, n° 2, 1971, p. 197

YUEN PING CHENG

[Y] Sur les prolongements de G-structures. Esquisses mathématiques, Paris, n° 9, 1970

DEUXIEME PARTIE

STRUCTURES TRANSVERSES

DES FEUILLETAGES

I N T R O D U C T I O N

L'idée originale de ce travail (née en collaboration avec Jean Pradines) provient d'une synthèse entre une idée de Pierre Molino et une idée de Raymond Barre, rappelées dans la partie I, § 4 .

L'idée de Molino [M] consiste à définir et étudier la "structure transverse" d'un feuilletage comme une certaine classe d'équivalence de feuilletages .En recollant les quotients de feuilletages par cette relation d'équivalence, on aboutit à la notion de F-variété.

Par ailleurs les Q-variétés de Barre [BA] possèdent d'excellentes propriétés "catégoriques", que l'on peut résumer en disant qu'elles définissent un "diptyque de Godement" au sens de [P_5], c'est-à-dire que les relations d'équivalence régulières y sont caractérisées par des propriétés du graphe de l'équivalence, formellement identiques à celles du théorème de Godement pour les variétés. Malheureusement les Q-variétés ne sont susceptibles de représenter que des quotients de feuilletages sans holonomie transversale , et d'ailleurs même pas tous ceux-ci [P_9] , contrairement à ce qui est affirmé dans [BA] .

Les deux théories ont en commun le fait d'étudier (à une certaine équivalence près) certains quotients de variétés, mais sont complémentaires en ce sens que, dans la première les classes d'équivalence sont connexes (feuilles d'un feuilletage), et dans la deuxième, totalement discontinues (du moins en un sens "catégorique").

Le présent travail s'efforce (sans toutefois pouvoir prétendre à un succès complet et définitif) de récupérer la richesse du contenu géométrique de la première théorie, tout en conservant la souplesse et la maniabilité de la seconde. La méthode introduite dans la partie II, consiste à considérer, sous le nom de QF-atlas, des quotients de variétés dont les classes d'équivalence sont des réunions de feuilles d'un feuilletage, variant "de façon suffisamment discontinue", condition réalisée en particulier pour les réunions dénombrables. Le cas des F-atlas est celui où chaque classe se réduit à une seule feuille, tandis que l'équivalence naturelle entre QF-atlas permet de se ramener systématiquement au cas (dit "étale") ou le feuilletage est discret, cas qui généralise clairement celui des Q-atlas, mais avec, ici, intervention possible de l'holonomie. Ayant ainsi "tué" les feuilles dans ces QF-atlas étales, on conserve exactement l'information souhaitée, c'est-à-dire celle qui concerne la "structure transverse".

Il faut toutefois signaler que la confrontation entre F-variétés et QF-variétés soulève deux problèmes actuellement non résolus :

a) bien que, dans des cas bien étendus (ceux où l'holonomie transversale de Godbillon $[G_1]$ se réduit à l'holonomie usuelle), l'équivalence transversale définie par Molino pour les feuilletages coïncide avec celle (a priori plus faible) qui est définie dans la théorie des QF-atlas, il semble vraisemblable qu'il n'en soit pas toujours ainsi, bien qu'aucun contre-exemple n'ait pu encore être construit ;

b) il semble vraissemblable qu'une QF-variété admettant un QF-atlas dénombrable ne provienne pas nécessairement d'une F-variété, mais aucun contre-exemple n'est actuellement connu, non plus qu'aucune caractérisation simple des F-variétés parmi les QF-variétés.

La confrontation des QF-atlas avec les Q-atlas conduit à une intéressante généralisation des propriétés du graphe de la relation d'équivalence définie par un Q-atlas, qui, elles-mêmes, étendent celles, bien connues, du graphe d'une équivalence régulière. Le rôle de ce graphe est ici tenu par un groupoïde différentiable (en général non trivial et non transitif) qui, dans le cas des feuilletages, n'est autre que le groupoïde d'holonomie transversale $([E_2] , [G_1])$. Dans [II, 3, théorème 1], nous en donnons une double caractérisation : par des propriétés universelles, et par sa structure algébrico-différentielle de groupoïde différentiable vérifiant certaines conditions de régularité. On obtient également une nouvelle caractérisation de l'équivalence des QF-atlas [th 3] . au moyen d'un carré commutatif vérifiant certaines propriétés universelles ("pseudo-carré de Godement").

Le résultat est moins satisfaisant pour ce qui concerne la variété tangente, qui ne peut pas toujours être définie, et dont les propriétés sont peu satisfaisantes [II, 3, déf. 16]. En réalité, même dans le cas des Q-variétés, une étude attentive du travail de Barre montre que la variété tangente est moins importante que les Q-faisceaux qu'elle détermine, mais le présent travail n'aborde pas la définition et l'étude des QF-faisceaux et des cohomologies qu'ils permettront de définir.

La partie III aborde la définition et l'étude des propriétés des QF-morphismes [III, 1] . Bien que la définition de ceux-ci semble s'imposer, à savoir l'existence d'un relèvement différentiable (qui peut être en particulier une submersion, une immersion, un étalement) donnant naissance à un carré commutatif, de grosses difficultés techniques apparaissent rapidement, qui sont de différents ordres :

a) il n'est pas toujours possible de relever un diagramme commutatif en un diagramme commutatif ;

b) il n'est pas toujours possible d'obtenir un relèvement au niveau des groupoïdes d'holonomie ;

c) certaines propriétés d'un relèvement donné (comme le fait d'être une submersion, un étalement) ne sont pas toujours valable pour tout relèvement ;

d) il n'existe pas en général de relèvement donnant naissance à un carré cartésien.

Ces difficultés ont été partiellement surmontées par des artifices souvent assez techniques, mais qui paraissent inévitables :

- pour le point a), différents lemmes techniques de relèvement [prop 4 et corollaires] .

- pour le point b), bon comportement des QF--submersions [§ 2];

- pour le point c), une hypothèse, dite de "régularité", vérifiée dans des cas étendus (mais non toujours) signifiant qu'il n'y a pas de germe d'holonomie non inversible (§ 3);

- pour le point d), considération de diagrammes "surcartésiens" (c'est-à-dire tels que la factorisation canonique

à travers le produit fibré ensembliste soit surjective), et définition très restrictive des "QF-plongements" (§ 4)(les morphismes diagonaux ne sont pas en général des QF-plongements).

Nous avons alors établi :

1) l'existence d'un produit fibré pour une QF-submersion et un QF-plongement (th.1) ; on en déduit que les QF-plongements forment bien une sous-catégorie (th. 1, corol. 3) .

2) l'existence (moyennant une hypothèse de régularité, utile pour certains relèvements de diagrammes commutatifs) (th. 2) d'un "pseudo-produit fibré" pour deux QF-submersions, ayant des propriétés universelles plus faibles qu'un carré cartésien, analogues à celles rencontrées pour le groupoïde d'holonomie, mais, cette fois internes à la catégorie des QF-morphismes ; ici encore, selon un phénomène typique de la catégorie des QF-variétés, le support ensembliste de ce pseudo-produit fibré n'est pas donné par un produit fibré ensembliste. Cette construction, longue et délicate, utilise toutes les ressources techniques précédemment introduites, dont elle est la justification.

Le théorème 2 établi, il devient possible de poser la question d'une réciproque, c'est-à-dire d'examiner si la catégorie $\mathcal{QF}$ possède une propriété de fermeture analogue à celle qui est décrite par le "théorème de Godement" pour la catégorie des (vraies) variétés et par le théorème de Barre pour les Q-variétés ; nous parlerons ici d'un "pseudo-théorème de Godement", compte tenu du fait que les propriétés universelles qui interviennent sont plus faibles que celles d'un diagramme cartésien.

La réponse que nous donnons est positive (th.3), mais seulement dans le cas des QF-étalements, le cas des QF- submersions restant ouvert.

Les nombreux contre-exemples rencontrés au cour de cette étude montrent que les difficultés techniques soulevées, bien que parfois inattendues, ne sont pas fortuites. Les résultats obtenus semblent les plus simples possibles, compte tenu de l'intervention de l'holonomie. Ces résultats ne constituent évidemment qu'un point de départ, mais qu'il était indispensable d'établir.

D'ores et déjà, il semble que l'existence des pseudo-produits fibrés permettra d'établir l'existence des noyaux simpliciaux qui seront utiles pour étendre les constructions cohomologiques de Barre aux QF-variétés. Par ailleurs, les QF-atlas semblent constituer le cadre naturel pour l'étude de structures transverses plus riches, telles que structures métriques, affines, etc...

Toutes les variétés différentiables sont de dimension finie, sont supposées de classe r, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$, et sont en général non séparées et non paracompactes.

Toulouse, le 20 décembre 1978.

T A B L E D E S M A T I E R E S

I - PRELIMINAIRES

1- Feuilletage 1

2 - Sous-variétés immergées

a- Composantes C^r-connexes 9

b- Propriétés des sous-variétés immergées..13

3- Quelques compléments sur les groupoïdes différentiables 19

a- Groupoïde subintransitif 19

b- Groupoïde et feuilletage 22

c- Groupoïde étale 24

4- Rappels sur les théorèmes de Godement, de Barre, et la notion de feuillage 25

a- Définitions 25

b- Théorème de Godement dans la catégorie des applications différentiables 26

b- Théorème de Godement-Barre dans la catégorie des Q-variétés 27

d- Notion de feuillage 27

II - QF-ATLAS, QF-VARIETES ET GROUPOIDES D'HOLONOMIE 32

1- QF-atlas : définition et exemples 32

a- QF-atlas 32

b- Premiers exemples de QF-atlas 38

c- Image et image réciproque de QF-atlas .41

2- QF-atlas QF-équivalents et QF-variétés 43

a- QF-atlas QF-équivalents 43

b- Autres exemples de QF-atlas 50

c- Définition et exemples de QF-variétés .. 53

d- Topologie des QF-variétés et sous-QF-variétés ouvertes 58

3- Groupoïde d'holonomie des QF-atlas et caractérisation des QF-atlas QF-équivalents 65

a- Notion de QF-carré 65

b- Groupoïde d'holonomie 76

c- Caractérisation des QF-atlas QF-équivalents 94

d- QF-variété tangente 107

III - CATEGORIE DES QF-VARIETES ET PSEUDO-THEOREME DE GODEMENT . 110

1- La catégorie des QF-variétés 111

a- QF-morphismes 111

b- Composition des QF-morphismes et atlas surcartésiens 116

c- Quelques propriétés de la catégorie $\mathcal{QF}$. 120

2- QF-submersions, QF-immersions et QF-étalements .. 121

a- Les sous-catégories $\mathcal{QF}_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{QF}_{\mathcal{I}}$ et $\mathcal{QF}_{\mathcal{E}}$ ... 121

b- Caractérisation des QF-atlas 126

c- Une propriétés remarquable des QF-submersions 129

d- Etude des atlas adaptés d'une
QF-submersion 134

3- QF-variétés régulières et QF-morphismes tangents
a- QF-variétés régulières 138
b- QF-morphismes tangents 152

4- Quelques autres sous-catégories de $\mathcal{QF}$ et produits fibrés 154
a- QF-immersions strictes, bien strictes et QF-plongements 154
b- produits fibrés 163

5- Produit pseudo-fibré et pseudo-théorème de Godement 173
a- Produit pseudo-fibré des QF-submersions 173
b- Un pseudo-théorème de Godement dans la catégorie $\mathcal{QF}$ 201

Bibliographie 207

I - P R E L I M I N A I R E S

Dans ce chapitre nous rappelons en les précisant, quelques résultats de la géométrie différentielle qui nous seront utiles, et qui sont plus ou moins bien connus. Nous introduisons parallèlement des notions essentielles pour la suite.

1 - Feuilletage ($[Bo_2]$, $[H_2]$, $[LA]$)

Notations $[Bo_2]$

Pour toute variété A, on notera A' un feuilletage sur A, T (A,A') le A-sous-fibré de TA correspondant ; pour tout $x \in A$, A'_x désignera la feuille de A' (c'est-à-dire la variété intégrale connexe de A', maximale pour l'inclusion) passant par x. En outre (A,A') signifiera la variété A avec le feuilletage A'. La topologie associée à A' sera souvent désignée par la même lettre, et le quotient de A par la relation d'équivalence sous-jacente à A' par A/A'.

Définition 1

Soient A, B, C des variétés, $f : A \longrightarrow C$, $g : B \longrightarrow C$ des morphismes de variétés. On dit que f et g sont transversaux (respt. transverses) en $z \in f(A) \cap f(B)$, si pour tout $(x,y) \in A \times B$ tel que $f(x)=g(y)=z$, $Tf(T_xA)$ et $Tg(T_yB)$ engendrent (respt. sont supplémentaires dans) T_zC.

f et g sont transversaux (respt. transverses), s'ils le sont en tout point de $f(A) \cap f(B)$.

Définition 2

Soit (A, A') une variété feuilletée, $f : B \longrightarrow A$ un morphisme de variétés. On dit que f est transversal (respt. transverse) à A' en $x \in f(B)$, si f et l'immersion canonique de A'_x et f sont transversaux (respt. transverses) en x ; f est transversal (respt. transverse) à A', s'il l'est en tout point de f (A).

En particulier,

Définition 3

Une sous-variété B de A est transversale (respt. transverse) à A' si l'immersion canonique de B dans A est transversale (respt. transverse) à A'.

Si (A, A') est une variété feuilletée, on sait que tout morphisme de variétés $f : B \longrightarrow A$ transversal à A', permet de définir un feuilletage B' sur A, de même codimension. B' est appelé image réciproque de A' (par f). Nous noterons $f^{*}A' = B'$ cette image réciproque.

Soient (A, A') une variété feuilletée, $f : B \longrightarrow A$ un morphisme de variétés transversal à A', B' l'image réciproque de A' par f. Alors :

Remarque 1

La restriction de f à toute sous-variété transverse à B' suffisamment petite est un difféomorphisme sur une sous-variété transverse à A' et compatible avec les relations d'équivalence définies sur A et B respectivement par A' et B'.

Remarque 2

Si A' est simple, il en est de même de $B' = f^{*}A'$

Définition 4

Soit (A,A') une variété feuilletée. Un ouvert U de A est dit simple (pour A') si le feuilletage U' induit sur U par A' est simple.

Supposons A et A' de dimensions respectives n et p, et identifions $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$.

Définition 5

Un voisinage ouvert U d'un point x de A sera appelé (abusivement) un ouvert distingué de (A,A') en x, s'il existe une carte feuilletante (U, φ) [BO_2] , telle que : $\varphi(U) = W \times V$, où W est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-p}$ et V un voisinage ouvert connexe de l'origine dans $\mathbb{R}^p$.

Remarque 3

En tout point $x \in A$, il passe toujours un ouvert distingué de (A,A') en x : il existe toujours une carte feuilletante (U,φ) de (A,A') telle que $\varphi(x) = 0$; il suffit alors de restreindre convenablement le domaine d'une telle carte.

Remarque 4

Si (U, φ) est une carte feuilletante de (A,A') de telle sorte que U soit un ouvert distingué de (A,A') en x, il existe une sous - variété canonique W_x transverse à A', contenant x et rencontrant chaque feuille de U' [cf. 4] en un point et un seul : on prend $W_x = \varphi^{-1}(W \times \{0\})$.

Remarque 5

Tout ouvert distingué en $x \in A$ est simple : le quotient est difféomorphe à W_x.

Les remarques 4 et 5 impliquent que W_x est une section d'ouvert distingué. Plus généralement nous poserons la

Définition 6

Soit (A,A') une variété feuilletée. Une sous - variété de A transverse à A' [df.3] , sera appelée sous - variété transverse distinguée de (A,A') si elle est une section d'un ouvert distingué.

Proposition 1

Soient (A,A') une variété feuilletée, $f : A \longrightarrow B$ une surmersion. Si le noyau de Tf est un A - sous-fibré de T (A,A'), alors il existe un feuilletage sur B d'image réciproque A'.

Démonstration

D'après les hypothèses, Ker Tf définit un feuilletage A'' de la variété A' : en effet toute variété intégrale de Ker Tf (considéré comme l'espace tangent à un feuilletage de la variété A) est une sous - variété de A'. Posons dim A = n, dim A' = p, dim A'' = q et identifions $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$, $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^{p-q} \times \mathbb{R}^q$. Pour tout $x \in A$ et d'après ce qui précède, il existe une carte (U, φ) de A telle que :

1°) (U,φ) est une carte feuilletante de (A,A'') pour laquelle U est un ouvert distingué de (A,A'') en x : autrement dit $\varphi(U) = W \times V$ où W est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-q}$ et V un voisinage ouvert connexe de l'origine de $\mathbb{R}^q$

2°) (U,φ) est une carte feuilletante de (A,A') pour laquelle U est un ouvert distingué de (A,A') en x : autrement dit $\varphi(U) = W_1 \times V_1$ où W_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-p}$ et V_1 un voisinage ouvert connexe de l'origine dans $\mathbb{R}^p$,

3°) $V_1 = W_2 \times V$ et $W = W_1 \times W_2$ où W_2 est un ouvert (connexe) de $\mathbb{R}^{p-q}$.

Nous pouvons alors écrire $\varphi(U) = W_1 \times W_2 \times V$.

Puisque Ker Tf = T (A,A") et d'après le choix de V du 1°), la restriction f_x de f à la sous - variété $\varphi^{-1}(W \times \{o\}) = W_x$ de A (qui est transverse au feuilletage A" de A) est un étalement. Quitte à rétrécir convenablement U, on peut alors supposer que f_x est un difféomorphisme sur un ouvert Y_x de B. On obtient, par cette construction, d'après la surjectivité de B, un recouvrement ouvert $(Y_x)_{x \in A}$ de B.

Pour $x \in A$, posons $g_x = pr_1 \varphi_x f_x^{-1}$, où $\varphi_x = \varphi|_{W_x}$. On vérifie que les ouverts Y_x sont les ouverts distingués au sens de [H_2] d'un feuilletage B' de B, d'applications distingués g_x.

Vérifions que $A' = f^* B'$: soit $Z \in T_x A$ tel que $Tf(Z) \in T(B,B')$; d'après la condition 1°), on peut écrire $Z = Z_1 + Z_2$ où Z_1 est tangent à W_x et Z_2 tangent à A" et par suite $Tf(Z) = Tf_x(Z_1)$; d'après la propriété 3°) ci-dessus, $T\varphi(Z)$ est de la forme (Z'_1, Z'_2, Z'). Il suffit alors (propriété 2°) de montrer que $Z'_1 = o$; puisque

$Tf\ (Z) = Tf_x\ (Z_1) \in T\ (B,B')$, on a $Tg_x\ (Tf\ (Z)) = o$; or $Tg_x\ (Tf\ (Z)) = Tg_x\ Tf_x\ (Z_1) = T(Pr_1\ \varphi_x)\ (Z_1) = Pr_1\ T\varphi(Z) = Z'_1$; donc $Z'_1 = o$.

Nous aurons besoin du résultat suivant :

Proposition 2

Soit (A,A') une variété feuilletée.

1°) Il existe un étalement surjectif $f : U \longrightarrow A$ tel que $f^{*}A'$ soit simple.

2°) Il existe une application $g : W \longrightarrow A$ transverse à A' telle que $g^{*}A'$ soit discret.

Démonstration

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'ouverts simples de A. Considérons pour chaque $i \in I$ une sous - variété transverse totale $W_i \subset U_i$ (c'est - à - dire qui rencontre toutes les feuilles du feuilletage induit U'_i) ; (il existe toujours un tel recouvrement, par exemple un recouvrement d'ouverts distingués). On pose alors $U = \sum_{i \in I} U_i$; les injections canoniques $f : U \longrightarrow A$ et $g : W \longrightarrow A$ fournissent respectivement une solution de 1°) et 2°), car le quotient de $f^{*}A' = U'$ s'identifie à la somme des quotients des U'_i ; et pour le 2° car les W_i sont transverses [df 1 et 2] à A'.

Remarque 6

Si A est à base dénombrable, on peut choisir le recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ dénombrable, et par suite U et W à bases dénombrables.

Remarque 7

Si on fait abstraction du problème de dénombrabilité, on peut effectuer des constructions canoniques en considérant :

- pour U la somme de tous les ouverts simples,

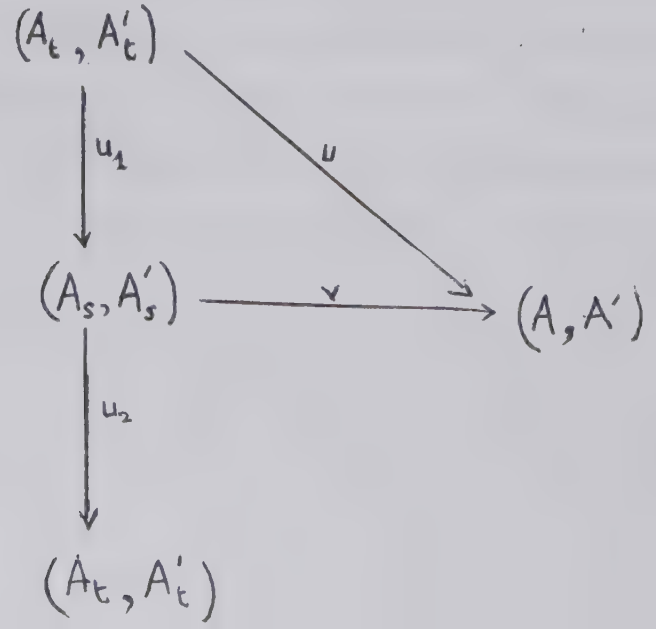
- pour W, soit la somme de toutes les sous- variétés transverses, soit la variété des germes de sous-variétés transverses (qui est un ouvert de la variété des germes des sous-variétés de A $[B O_2]$.

Remarque 8

On obtient un résultat plus précis qui sera utilisé dans la suite, en prenant, pour chaque $x \in A$, un ouvert U_x distingué en x et une sous - variété transverse distinguée W_x (W_x existe toujours). On pose alors

$A_s = U = \sum_{x \in A} U_x$, $A_t = W = \sum_{x \in A} W_x$.

En désignant par v (respt. u) l'étalement (respt. l'immersion) de A_s (respt. A_t) sur A, nous avons le diagramme commutatif suivant de variétés feuilletées :



où u_1 et u_2 sont définis par construction de A_s et A_t, et $A'_s = v^{\#}A'$, $A'_t = u^{\#}A' = u_1^{\#}A'_s$. Toujours par construction, on vérifie que $u_2 u_1 = id$.

2 - Sous - variété immergée

a) Composantes C^r - Connexes

Soit A une variété de classe C^r.

Définition 7

(i) une partie B de A est dite C^s- connexe ($o \leqslant s \leqslant r$), si elle est connexe par arcs de classe C^s par morceaux

B est C^s-connexe si et seulement si elle est connexe par arcs de classe C^s : en effet un changement de paramètre utilisant des fonctions s-plates permet de ramener un arc de classe C^s par morceaux à un arc de classe C^s.

(ii) Une composante C^s-connexe de A est une partie C^s-connexe maximale.

On définit également la notion de composantes C^s-connexes d'une partie de A.

Remarque 9

1°) on déduit par un raisonnement classique, que toute composante C^s-connexe d'une variété A est ouverte et fermée : A est donc somme de ses composantes C^s-connexes (qui sont tout simplement ses composantes connexes).

2°) Si B est une partie C^o-connexe d'une variété A. Alors B est $C^{s'}$-connexe pour tout $o \leqslant s' \leqslant s$.

3°) Le graphe d'une fonction continue et n'ayant de dérivée en aucun point, montre qu'une partie C^o-connexe peut être C^s totalement discontinue pour $s > o$, et que les composantes C^s-connexes d'une partie d'une variété sont distinctes de ses composantes C^o connexes.

Définitions 8

Soient A et B deux C^r-variétés. Une immersion $f : A \longrightarrow B$ est dite stricte si pour toute C^r-variété C et toute application $g : C \longrightarrow A$, fg est de classe C^r si et seulement si g l'est.

Définition 8'

[BA] : Une partie B d'une variété A est une sous-variété immergée de A, s'il existe une structure de variété sur B telle que l'injection canonique de B dans A soit une immersion stricte.

Remarque 10

Une partie B d'une variété A possède au plus une structure de sous - variété immergée : ceci découle de la propriété universelle de la définition 8'.

Remarque 11

Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable de variétés et si pour chaque i, V_i est une sous - variété immergée de U_i, alors $\sum_{i\in I} V_i$ est une sous - variété immergée de $\sum_{i\in I} U_i$: toute application différentiable $f : C \longrightarrow \sum_{i\in I} U_i$ et à valeurs dans $\sum_{i\in I} V_i$ est localement à valeurs dans un U_i, donc dans un V_i.

Remarque 12

1°) les immersions strictes sont stables par compositions et par produits finis.

2°) Si $f : A \longrightarrow B$ est une immersion stricte et si $g : A \longrightarrow C$ est une application différentiable, alors $(f,g) : A \longrightarrow B \times C$ est une immersion stricte.

3°) Si gf est une immersion stricte, il en est de même de f.

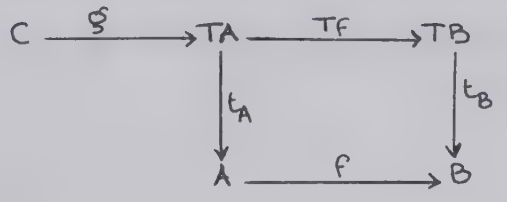
Dans la proposition suivante, nous supposons r infini.

Proposition 3

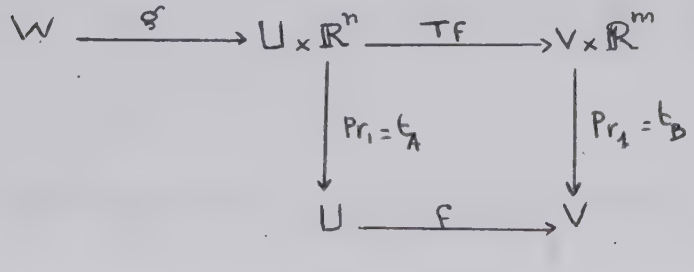
Soit $f : A \longrightarrow B$ une immersion stricte. Alors l'application $Tf : TA \longrightarrow TB$ est aussi une immersion stricte.

Démonstration

On sait déjà que Tf est une immersion. Montrons que cette immersion est stricte. Soit alors $g : C \longrightarrow TA$ une application telle que $(Tf)\,g$ soit C^∞. Nous avons le diagramme suivant :



Comme f est une immersion stricte et que $f(t_A)g = t_B(Tf)g$ est C^∞, $(t_A)g$ est C^∞. En coordonnées locales le diagramme précédent s'écrit alors, en conservant les mêmes notations pour les applications :



où n = dim A, m = dim B et W,U,V sont des ouverts respectifs de C, A et B. Tf est alors localement de la forme :
$(y, z) \longrightarrow (f(y), h.z)$, où h est une application linéaire injective (car f est une immersion) de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. D'autre part g est aussi localement de la forme : $x \longrightarrow (g_1(x), g_2(x))$. Or $fg_1 = Pr_1\,(Tf)g$ étant C^∞ et f stricte, g_1 est donc C^∞. Puisque $(Tf)g$ est C^∞, il en est de même de $Pr_2\,(Tf)\,g = hg_2$, donc de g_2 (car h est linéaire et injective). Par suite g est C^∞.

b) Propriétés des sous - variétés immergées

Proposition 4

Soit A une partie d'une variété B. Alors A est une sous-variété immergée de B si et seulement si ses composantes C^r-connexes en sont.

Démonstration

Soient $(A_i)_{i\in I}$ les composantes C^r-connexes de la partie A. Si les A_i, $i\in I$, sont des sous - variétés immergées de B, A s'identifie alors à la somme ensembliste des A_i, et on peut ainsi munir A de la structure de variété somme des A_i de telle sorte que les A_i en soient des ouverts. Notons j l'injection de A dans B ; il est clair que j est une immersion de A (munie de la structure de variété précédente) dans B. Montrons que j est stricte. Soit alors C une variété, $g : C \longrightarrow A$ une application telle que jg soit de classe C^r. En supposant C C^r-connexe (ce qui est vrai localement), g(C) est C^r-connexe et contenu dans A, donc dans un A_i. Comme $j|_{A_i}$ est une immersion stricte par hypothèse, $g : C \longrightarrow A_i$ est de classe C^r, donc aussi g .

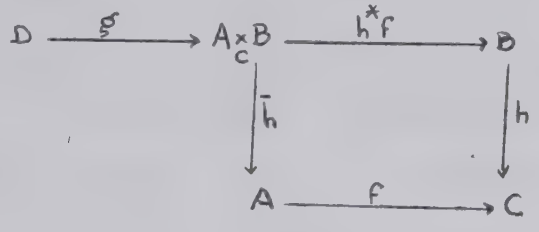
La réciproque s'obtient en remarquant que si A est sous - variété immergée de B, les A_i sont aussi les composantes C^r-connexes de A considérée comme variété, donc des ouverts de A.

Proposition 5

Soient $f : A \longrightarrow B$ une immersion stricte, $h : B \longrightarrow C$ un C^r-morphisme tels que f et h soient transversaux. Alors $h^{*}f : A \underset{C}{\times} B \longrightarrow B$ est une immersion stricte. Réciproquement si f est un morphisme, h une surmersion tels que $h^{*}f : A \underset{C}{\times} B \longrightarrow B$ soit stricte, alors f est une immersion stricte.

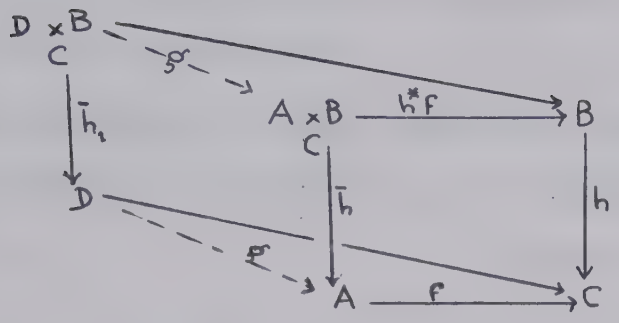
Démonstration

Soit le diagramme suivant commutatif dans la catégorie $\mathcal{E}$ des applications :



où g est une application de la variété D dans $A \underset{C}{\times} B$ et telle que $(h^{*}f)g$ soit de classe C^r. On sait que $h^{*}f$ est une immersion ; montrons qu'elle est stricte; si $(h^{*}f)g$ est de classe C^r, il en est de même de $h\,(h^{*}f)g = f\bar{h}g$, donc de $\bar{h}g$ car f est stricte ; g est donc de classe C^r comme application de D dans A x B ; de plus g est à valeurs dans $A \underset{C}{\times} B$ qui est une sous - variété immergée (et même plongée) de A x B, d'où le résultat.

Montrons maintenant la deuxième partie de la proposition ; soit alors $g : D \longrightarrow A$ telle que fg soit de classe C^r. Nous avons le diagramme ensemblistement commutatif suivant :



dans lequel $\bar{g}$ est la factorisation ensembliste provenant des propriétés des diagrammes cartésiens. Les flèches en pointillés sont donc à priori ensemblistes. Si alors $h^{*}f$ est une immersion stricte, alors $\bar{g}$ est de classe C^r, donc aussi $g\bar{h}_1 = \bar{h}\bar{g}$, donc aussi g (car $\bar{h}_1$ est une surmersion).

3 - Quelques définitions

Pour toute variété A, nous noterons $\widetilde{A}$ la variété des germes de sous-variétés de A, ρ l'immersion canonique de $\widetilde{A}$ dans A $[BO_2]$.

On sait $[BO_2]$, que si f : B ⟶ A est une subimmersion, il existe une submersion λ : B ⟶ $\widetilde{A}$ telle que $f = \rho\lambda$; par définition $\rho\lambda$ est appelée factorisation canonique de f $[BO_2]$. λ étant ouverte, nous avons aussi une factorisation $f = \rho'\lambda'$ où λ' est une surmersion, c'est-à-dire une submersion surjective ; dans la suite nous adopterons la définition suivante :

Définition 9

Avec les notations ci-dessus, $\rho'\lambda'$ sera appelé factorisation canonique de la subimmersion f.

Rappelons aussi que dans [E_2] , Ehresmann désigne par sous-variété extraite d'une variété A, un ouvert de $\widetilde{A}$. Par extension nous poserons :

Définition 10

Une immersion sera dite une extraction, si la surmersion de sa factorisation canonique est injective (donc est un difféomorphisme).

Une extraction est ce que nous avons appelé dans [PW] une immersion minimale, terminologie déjà utilisée dans la littérature et qui prêterait à confusion.

Proposition 6

a) Un plongement est une immersion stricte,

b) Une immersion stricte est injective,

c) Une immersion injective est une extraction.

Démonstration

a) est bien connu. Pour établir b), soient $f : A \longrightarrow B$ une immersion stricte, a_1 et a_2 deux points de A tels que $f(a_1) = f(a_2)$. Considérons un élément $d \in \mathbb{R}$, et définissons les applications suivantes :

$\mu : \mathbb{R} \longrightarrow A$ définie par $\mu(x) = a_1$ si $x \leqslant d$, $\mu(x) = a_2$ si $x > d$; $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow B$ définie par $\lambda(x) = f(a_1) = f(a_2)$. Alors $f\mu = \lambda = cte$ est différentiable et μ ne l'est pas si $a_1 \neq a_2$. La démonstration de c) résulte du fait que la surmersion de la factorisation canonique [df. 9] d'une immersion injective est une immersion injective étale, donc un difféomorphisme.

Corollaire

L'image d'une immersion stricte est une sous - variété immergée.

Exemples 1

Les exemples suivants montrent que toutes ces notions sont distinctes :

a) Une immersion stricte n'est pas en général un plongement : sur une variété séparée à base dénombrable, l'immersion d'une feuille d'un feuilletage est stricte [C] ; c'est un plongement si seulement si la feuille est propre [H_2].

b) Le raisonnement de [C] prouve aussi que toute réunion dénombrable de feuilles d'une variété feuilletée paracompacte est une sous - variété immergée, car une telle réunion est une variété intégrale à base dénombrable.

c) Par ailleurs tout sous - ensemble dénombrable d'une variété non nécessairement paracompacte est une sous - variété immergée, car il est totalement discontinu au sens de C^o et à fortiori au sens C^r.

d) Une immersion injective n'est pas nécessairement stricte : soient M une variété non discrète (c'est-à-dire dont la topologie sous-jacente n'est pas discrète), M_1 la variété discrète de même ensemble sous-jacent que M ; l'immersion $M_1 \longrightarrow M$ est injective et non stricte car les seules C^r - morphismes de but M_1 sont les applications localement constantes. Plus généralement,

e) Si (A,A') est une variété feuilletée telle que $A' \neq A$, l'immersion canonique de A' dans A n'est pas stricte : l'injection d'une sous-variété transverse à A' dans A n'est pas différentiable comme application de but A', car $A' \neq A$ et un vecteur non nul, tangent à une sous-variété transverse ne peut être tangent à A'.

f) Pour toute variété A, l'immersion $\rho : \tilde{A} \longrightarrow A$ [I,3] est une extraction non injective en général.

Pour clore ce paragraphe, notons que, si nous désignons par $\mathcal{D}$ la catégorie des morphismes de variétés non nécessairement séparées, $\mathcal{S}$ (respt. $\mathcal{I}$) la sous-catégorie des surmersions (respt. immersions strictes), et P le foncteur d'oubli de $\mathcal{D}$ vers la catégorie $\mathcal{E}$ des ensembles ; en utilisant une notion introduite dans [P_5] , on peut résumer l'ensemble des propriétés des immersions strictes établi ici par l'unique énoncé suivant :

Proposition 7

$(\mathcal{Q}, P, \mathcal{J}, \mathcal{E})$ est un $\mathcal{E}$-diptyque.

De plus d'après le théorème général énoncé dans $[P_5]$, ce diptyque se plonge dans un diptyque de Godement qui n'est autre que la catégorie des Q-variétés de Barre, munie des sous-catégories formées par les Q-surmersions et les Q-immersions strictes $[BA]$.

3 - Quelques compléments sur les groupoïdes différentiables

Notations

Soit G un groupoïde différentiable de base B $[E_1]$. Nous noterons α_G (respt. β_G) l'application surmersive source (respt. but), ε_G le plongement canonique de B dans G, xy le produit de deux éléments x et y de G quand il est défini, x^{-1} l'inverse de $x \in G$; on posera $\pi_G = (\beta_G, \alpha_G) : G \longrightarrow B$ qui est un foncteur de G vers le groupoïde trivial B x B ; on identifiera souvent B et $\varepsilon_G B$.

a) Groupoïde subintransitif

Si G est un groupoïde différentiable de base B, la relation définie sur B par : $e \sim e'$ si et seulement s'il existe $g \in G$ tel que $\pi_G(g) = (e,e')$ est une relation d'équivalence sur B.

Définition 11

La relation d'équivalence ci-dessus est dite d'intransitivité, les classes (d'équivalence) sont appelées classes d'intransitivité et le quotient, le quotient d'intransitivité.

Soit G un groupoïde différentiable de base B. Pour $e \in B$, notons $\bar{e}$ la classe d'intransitivité de e, G_e la sous-variété plongée $\alpha_G^{-1}(e)$ de G, $\beta_1 = \beta_G|_{G_e}$.

L'application différentiable $\beta_1 : G_e \longrightarrow B$ est surjective sur $\bar{e}$.

Définition 12

Un groupoïde G est dit subintransitif si π_G est une subimmersion.

On a, avec les notations précédentes,

Proposition 8

Soit G un groupoïde différentiable subintransitif de base B. Alors il existe pour tout $e \in B$, une structure de variété sur $\bar{e}$ telle que β_1 soit une surmersion.

Démonstration

Comme π_G est une subimmersion, $G_e^o = \pi_G^{-1}(e,e)$ est une sous-variété plongée de G (en réalité cette propriété subsiste sans hypothèse sur π_G [P$_1$], et par suite la proposition 8) ; la loi de composition partielle dans G induit alors une structure de groupe de Lie sur G_e^o. De plus G_e^o opère différentiablement et librement à droite sur G_e par : $G_e \times G_e^o \longrightarrow G_e$, $(x , g) \longrightarrow xg$; d'où l'application différentiable.

$$\gamma : G_e \times G_e^o \longrightarrow G_e \times G_e$$

$$(x, g) \longrightarrow (x, xg)$$

Le quotient de G_e par l'action de G_e^o s'identifie à $\bar{e}$. Pour démontrer la proposition, il suffit alors de montrer que (G_e, β_1, G_e^o) est une fibration principale. Il faut et il suffit pour cela que γ soit un plongement. D'autre part G_e et G_e^o étant des sous-variétés plongées de G, $G_e \times G_e^o$ et $G_e \times G_e$ sont des sous-variétés plongées de G x G, donc (par stabilité à la source) des sous-variétés plongées respectives de $\underset{\alpha_G = \beta_G}{G \times G}$ et $\underset{\beta_G = \beta_G}{G \times G}$

(car $\underset{\alpha_G = \beta_G}{G \times G}$ et $\underset{\beta_G = \beta_G}{G \times G}$ sont des sous-variétés plongées de G x G).

Le difféomorphisme

$$\theta : \underset{\alpha_G = \beta_G}{G \times G} \longrightarrow \underset{\beta_G = \beta_G}{G \times G}$$

$$(x,y) \longrightarrow (x,xy)$$

induit alors par restriction, un difféomorphisme θ_1 de $G_e \times G_e^o$ sur une sous-variété plongée $\theta(G_e \times G_e^o)$ de $\underset{\beta_G = \beta_G}{G \times G}$. Mais $\theta(G_e \times G_e^o)$ est aussi une sous-variété plongée de $G_e \times G_e$ (car $\theta(G_e \times G_e^o) \subset G_e \times G_e$)). Puisque $\gamma = \theta_1$, on en déduit le résultat.

Notons que la structure de variété ainsi induite sur chaque classe d'intransitivité est nécessairement unique (en vertu des propriétés des structures quotients) et que l'injection canonique de $\bar{e}$ dans B est une immersion (localement elle est de la forme $\beta_1 \sigma$, où σ est une section de β_1). Mais en général cette injection n'est pas une immersion stricte comme on le voit sur l'exemple de [BA] (page 242), car dans ce cas la structure obtenue par la proposition 8 sur l'unique classe d'intransitivité est la structure discrète de $\mathbb{R}$.

b) Groupoïde et feuilletage

L'exemple précédent justifie la définition suivante :

Définition 13

Un groupoïde différentiable G subintransitif, est dit transhomogène, si les classes d'intransitivité [df 11], munies de leur structure de variété donnée par la proposition précédente, sont des sous-variétés immergées (de la base).

Soient B une variété, L le foncteur de Lie [P_2] pour les groupoïdes différentiables de base B. Nous avons le résultat suivant qui met en évidence l'intérêt des notions introduites en a).

Théorème 1

Soit G un groupoïde différentiable de base B. Si G est subintransitif, l'image de $L\pi_G$ est un sous-fibré intégrable de TB dont les classes d'intransitivité (munies de la structure de variété définie par la proposition 8) sont des variétés intégrales. Si de plus G est transhomogène, les composantes C^r-connexes dans B des classes d'intransitivité sont les feuilles du feuilletage défini par $L\pi_G$.

Démonstration

Désignons par $\mathfrak{g}$ l'algébroïde de Lie de G ($[P_2]$, $[P_4]$). L π_G est la restriction p à G de $T\beta_G$; l'hypothèse que Π_G est une subimmersion implique que p est de rang localement constant ; p ($\mathfrak{g}$) est alors un sous-fibré de TB, qui est intégrable car en tout point $e \in B$, $\bar{e}$ (munie de sa structure de variété précédemment décrite) est une sous-variété intégrale ; p ($\mathfrak{g}$) est donc le fibré tangent à un feuilletage B' de B.

Pour tout $e \in B$, $p(\mathfrak{g}_e) = T_e B' = T_e \bar{e}$, où $\mathfrak{g}_e$ est la fibre de $\mathfrak{g}$ au-dessus de e. Donc $\bar{e}$ est un ouvert de B'. On en déduit que toute feuille de B' est une composante connexe d'une des variétés $\bar{e}$. Si de plus G est transhomogène, on sait [remarque], qu'alors les composantes C^r-connexes de $\bar{e}$ considéré comme une partie de B, coïncident avec ses composantes C^r-connexes (pour sa structure de variété), donc avec ses composantes connexes.

Comme conséquence, nous avons le critère suivant pour les groupoïdes transhomogènes :

Corollaire

Soit G un groupoïde subintransitif de base B. Si pour tout $e \in B$, G_e est à base dénombrable, alors G est transhomogène.

En effet, on déduit d'abord de la proposition 8 que $\bar{e}$ est à base dénombrable. De plus c'est une variété intégrale du feuilletage de B construit dans le théorème 1. Le résultat découle alors de [C].

c) Groupoïde étale

Définition 14

On dira qu'un groupoïde différentiable G est étale si α_G (et β_G) sont des étalements.

Exemples

1) Pour toute variété B, l'ensemble Γ_B des germes de difféomorphismes locaux de B muni de sa topologie naturelle de sous-variété extraite de $\widetilde{B \times B}$ (variété des germes des sous-variété de B x B), est un groupoïde étale.

2) Tout pseudo-groupe de transformations différentiables de B, s'identifie à un sous-groupoïde ouvert (donc étale) de Γ_B.

Remarque 13

Si G est un groupoïde étale de base B, pour tout $e \in B$, $G_e = \alpha_G^{-1}(e)$ est une variété discrète plongée dans B, donc un sous-espace discret de B.

Remarque 14

Tout groupoïde étale de base B est muni d'un foncteur canonique étale vers Γ_B défini par : à $g \in G$, on associe le germe en $\alpha_G(g)$ de $\beta_G \sigma$, où σ est une section locale de l'étalement α_G passant par g.

Remarque 15

Quand il est défini, le produit fibré de groupoïdes étales est un groupoïde étale dont la base est le produit fibré des bases.

4 - Rappels sur les théorèmes de Godement, de Barre et la notion de feuillage

a) Définition 15

On dira qu'un groupoïde différentiable G est Π-immergé (respt. strictement Π-immergé), si Π_G est une immersion (respt. une immersion stricte).

G est Π-plongé si Π_G est un plongement.

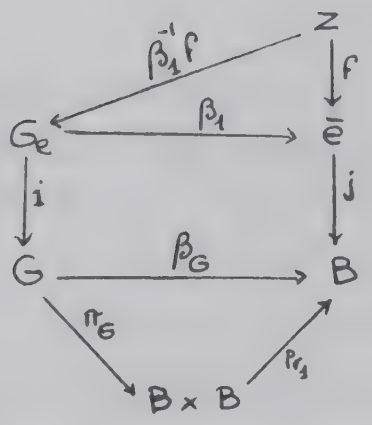
Lorsque G est strictement Π-immergé, Π_G est injective [prop 6], et l'ensemble sous-jacent à G s'identifie alors au graphe de la relation d'équivalence d'intransitivité [df 11].

Proposition 9

Tout groupoïde différentiable strictement Π-immergé est transhomogène [df 13].

Démonstration

Soit G un groupoïde différentiable strictement Π-immergé de base B. Pour tout $e \in B$ et avec les notations de la proposition 8, β_1 est un difféomorphisme de G_e sur $\bar{e}$ puisque les groupes d'isotropie sont nuls. Notons j l'immersion de $\bar{e}$ dans B et soit $f : Z \longrightarrow \bar{e}$ telle que jf soit différentiable. Nous avons le diagramme ensemblistement commutatif :



où i est l'immersion canonique stricte de G_e dans G. Puisque $(pr_1)\ \pi_G\ i\ \beta_1^{-1}\ f = jf$ est différentiable, il en est de même de $\pi_G\ i\ \beta_1^{-1}\ f = (jf, \lambda)$ (où λ est l'application constante égale à e de Z dans B), donc de $\beta_1^{-1}\ f$ car i et π_G sont des immersions strictes. Par suite f est différentiable car β_1 est un difféomorphisme.

Remarque 15'

Avec les définitions 12, 13 et 15 et la proposition 9, nous avons les implications suivantes pour les groupoïdes différentiables :

π-plongé $\Longrightarrow$ (strictement-π-immergé) $\Longrightarrow$ π-immergé $\Rightarrow$ subintransitif

(strictement-π-immergé) $\Rightarrow$ transhomogène $\Rightarrow$ subintransitif

b) Théorème de Godement dans la catégorie des applications différentiables [S]

Soit R le graphe d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur une variété A, S le quotient de $\mathcal{R}$, p la projection canonique de A sur S.

Le résultat suivant est bien connu

Théorème 2 ($[BO_2]$, $[S]$)

Pour que $\mathcal{R}$ soit régulière, il faut et il suffit qu'il existe sur R une structure de variété vérifiant les conditions :

(i) l'injection de R dans A x A est un plongement,

(ii) la projection $Pr_1 : R \longrightarrow A$ est une submersion.

Nous utiliserons ce résultat sous la formulation équivalente suivante, avec les mêmes notations :

Théorème 2'

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{R}$ soit régulière est qu'il existe sur R une structure de groupoïde Π-plongé de base A.

C) Théorème de Godement dans la catégorie des Q-variétés [BA]

Reprenons les notations de b).

Définition 15" [BA]

(A,p) ou plus simplement A est un Q-atlas de S si R possède une structure de groupoïde étale strictement Π-immergé.

Cette définition est équivalente à celle de la page 241 de [BA], donc aussi à celle de la page 234 de [BA].

Si A est un Q-atlas de S, S est le quotient d'intransitivité du groupoïde différentiable R et on a :

1°) R est un groupoïde transhomogène [prop. 9] et étale,

2°) La structure de variété des classes d'équivalence décrite dans la proposition 8 est discrète : elles sont dont ouvertes pour la structure de variété discrète de l'ensemble sous-jacent à A.

Définition 16

(i) On dit que deux Q-atlas A et B de S sont Q-équivalents, c'est-à-dire équivalents au sens de [BA] , si la variété somme A + B est un Q-atlas de S.

La relation de Q-équivalence est une relation d'équivalence entre Q-atlas.

(ii) [BA] une structure de Q-variété sur S est une classe de Q-équivalence de Q-atlas de S .

Considérons maintenant deux Q-variétés S_1 et S_2 et une application f de S_1 dans S_2,

Définition 17 [BA]

(i) f est un Q-morphisme s'il existe des atlas (A_1, p_1), et (A_2, p_2) de S_1 et S_2 respectivement, une application différentiable $\tilde{f} : A_1 \longrightarrow A_2$ appelée relèvement de f, tels que le diagramme suivant soit commutatif dans $\mathcal{E}$

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & A_2 \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ S_1 & \xrightarrow{f} & S_2 \end{array}$$

(ii) Un Q-morphisme f est une Q-submersion (respt. Q-immersion), s'il admet un relèvement $\bar{f}$ submersif (respt. immersif), et alors il en est de même de tout relèvement.

Définition 18 [BA]

(i) Une Q-immersion $f : S_1 \longrightarrow S_2$ est stricte si pour toute Q-variété S et toute application $g : S \longrightarrow S_1$, fg est un Q-morphisme si et seulement si g en est un.

(ii) [BA] : Une partie S_1 de S_2 est une sous-Q-variété immergée de S_2 s'il existe sur S_1 une structure de Q-variété telle que l'injection canonique de S_1 dans S_2 soit une Q-immersion stricte.

Théorème 3 (de Godement - BARRE) [BA]

Soit S une Q-variété, R le graphe d'une relation d'équivalence sur S, de quotient T, et de projection canonique $p : S \longrightarrow T$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe sur T une structure de Q-variété rendant p Q-submersive est que R soit une sous-Q-variété immergée de S x S et que les projections $pr_i : R \longrightarrow S$ soient Q-submersives.

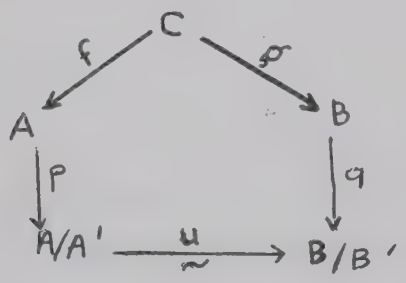
d) Notion de feuillage [H]

Considérons deux variétés feuilletées (A,A') et (B,B'), de projections canoniques respectives $p : A \longrightarrow A/A'$, et $q : B \longrightarrow B/B'$.

Définition 19

On dira que A' et B' sont QF-équivalents s'il existe une bijection u de A/A' sur B/B', des submersions $f : C \longrightarrow A$ et $g : C \longrightarrow B$ telles que upf = qg.

Autrement dit que le diagramme suivant est ensemblistement commutatif :



Remarque 16

Ceci implique, du moins lorsque les variétés sont paracompactes, que les feuilletages images réciproques f^*A' et g^*B' de A' et B' respectivement coïncident : si Z est une feuille de f^*A', l'égalité upf = qg implique que g(Z) est contenue dans une feuille B'_x de B'; donc l'application $g|_Z : Z \longrightarrow B'_x$ est différentiable car B'_x est une sous-variété immergée ([C] et df 8). Par suite Z est une variété intégrale de g^*B'. En opérant symétriquement, on en déduit que $f^*A' = g^*B'$.

Remarque 16'

Si l'une des variétés A,B n'était pas paracompacte (cas que, de toutes façons nous n'étudierons pas), il conviendrait d'imposer dans la définition 19 que les feuilletages f^*A' et g^*B' coïncident. Ceci ne serait plus nécessairement une conséquence comme on le voit en prenant pour A' un feuilletage non trivial à une seule feuille $[H_\theta]$, et pour B un point.

Définition 20 [M]

Soient (A,A') et (B,B') deux variétés feuilletées, où A et B sont paracompactes. Les feuilletages A' et B' sont F-équivalents s'ils sont QF-équivalents et si (avec les notations de la définition 19) l'image réciproque par f (respt. g) d'une feuille de A' (respt. B') est une feuille de $f^{*}A' = g^{*}B'$.

Cette définition coïncide avec celle de feuilletages "transversalement équivalents" de Molino [M].

Définition 21 [M]

Soit W un espace topologique à base dénombrable. Un F-atlas ou atlas de feuillage différentiel sur W sera une famille $(U_i, V_i, V'_i, \pi_i)_{i\in I}$ de quadruplets où :

(1°) $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de W.

(2°) pour tout $i\in I$, (V_i, V'_i) est une variété feuilletée dont l'espace des feuilles est U_i, et la projection naturelle $\pi_i : V_i \longrightarrow U_i$.

(3°) au-dessus de l'ouvert $U_i \cap U_j$ de W, les feuilletages induits sur $\pi_i^{-1}(U_i \cap V_j)$ et $\pi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$ par V'_i et V'_j respectivement sont F-équivalents.

Définition 22

Deux F-atlas de W sont F-équivalents si leur réunion est encore un F-atlas de W. C'est une relation d'équivalence entre F-atlas de W. Une structure de F-variété ou de feuillage différentiel sur W est une classe d'équivalence de F-atlas, autrement dit un F-atlas maximal.

II

Q F - A T L A S, Q F - V A R I E T E S E T G R O U P O I- D E D ' H O L O N O M I E

1 - QF-atlas : définitions et exemples

a) QF-atlas

Définition 1

Une variété découpée est un triplet (A, a, S) où A est une variété, S un ensemble, a une surjection de A sur S.

Toute variété découpée (A, a, S) définit une relation d'équivalence sur A de quotient S et de projection canonique a ; la réciproque est claire.

Soit (A, a, S) une variété découpée.

Définition 2

(A, a, S) est un QF-atlas de S s'il existe un feuilletage A' sur A tel que les conditions suivantes soient vérifiées :

(A_1) : pour chaque $s \in S$, il existe sur $a^{-1}(s)$ une structure de variété qui en fait à la fois une sous-variété ouverte de A' et une sous-variété immergée [I,2,df8] de A,

(A_2) : pour tout $(x, y) \in A \underset{S}{\times} A$, il existe des sous-variétés U et V transverses à A' [I, 1, df 3], un difféomorphisme σ de U sur V tels que $(x, y) \in U \times V$, $\sigma(x) = y$ et $a\,\sigma(t) = a(t)$ pour tout $t \in U$.

Définition 3

Le difféomorphisme σ de la définition 2 est appelé isomorphisme transverse local du QF-atlas (A, a, S). Le germe en $x \in A$ d'un isomorphisme transverse local sera appelé germe d'holonomie de (A, a, S) en x.

Définition 4

Les fibres de l'application a seront appelées les rameaux de (A, a, S) et leurs composantes connexes dans A', les feuilles de (A, a, S)

Remarque 1

(i) Pour tout QF-atlas (A, a, S), le feuilletage A' de la définition 2 est unique : ses feuilles sont les

composantes C^r-connexes dans A des fibres de a [I, 2, prop 4]

(ii) On verra dans les exemples que les germes d'isomorphismes locaux de source et but donnés ne sont pas uniques en général .

Définition 5

On dira qu'un QF-atlas (A, a, S) est simple (respt. étale, respt. est un feuilletage) si le feuilletage A' est simple, (respt. discret, respt. si chaque rameaux de (A, a, S) n'a qu'une feuille).

Autrement dit si (A, a, S) est un feuilletage, S s'identifie au quotient A/A'.

Les QF-atlas étales sont appelés à jouer un rôle privilégié dans cette théorie ; on va encore les caractériser dans le résultat suivant plus maniable :

Proposition 1

Soit (A, a, S) une variété découpée. Alors (A, a, S) est un QF-atlas étale de S si et seulement les conditions suivantes sont vérifiées :

$(A_1)'$: Toute application différentiable f : B $\longrightarrow$ A telle que af : B $\longrightarrow$ S soit une application constante, est localement constante.

$(A_2)'$: Pour tout (x, y) $\in$ A $\underset{S}{\times}$ A , il existe des voisinages ouverts U et V de x et y respectivement et un difféomorphisme σ de U sur V tels que $\sigma(x) = y$ et $a\sigma(t) = a(t)$ pour tout $t \in U$.

Démonstration

Soit (A, a, S) un QF-atlas étale de S. Alors (A, a, S) satisfait aux propriétés (A_1) et (A_2) de la définition 2 et le feuilletage A' est discret [II, 1, df. 5] . Si f : B $\longrightarrow$ A est différentiable et af : B $\longrightarrow$ S constante, posons $x_o = a(f(B))$. D'après la condition (A_1), f induit une application différentiable f_o de B dans $a^{-1}(x_o)$ (qui est une sous-variété immergée de A) ; A' étant discret et $a^{-1}(x_o)$ un ouvert de A', $a^{-1}(x_o)$ est une variété discrète ; f_o et donc f est localement constante. La condition $(A_2)'$ découle directement de (A_2).

Réciproquement, considérons une variété découpée vérifiant $(A_1)'$ et $(A_2)'$ et vérifions les conditions (A_1) et (A_2) de la définition 2 de [II, 1] .

(A_1) : le feuilletage A' considéré est le feuilletage discret de A ; pour tout $s \in S$, montrons que $a^{-1}(s)$, avec la structure discrète de variété, est une sous-variété immergée de A ; soit alors $f : B \longrightarrow a^{-1}(s)$ telle que $g = if$ soit différentiable (i est l'immersion de $a^{-1}(s)$ dans A). Alors d'après $(A_1)'$, g est localement constante, donc f aussi ; $a^{-1}(s)$ étant une variété (discrète), f est différentiable, d'où (A_1).

(A_2) est évident.

Remarque 2

Lorsque le QF-atlas (A, a, S) est un feuilletage, un germe d'holonomie de (A, a, S) est un germe d'holonomie transversal au sens de Godbillon [G_1] . Dorénavant nous entendrons donc toujours par germe d'holonomie d'un feuilletage, un germe d'holonomie transversal.

Les germes d'holonomie d'un feuilletage au sens usuel seront alors appelés germes d'holonomie α- connexe. Cette terminologie est justifiée par le fait que le groupoïde d'holonomie usuel est la composante α- connexe au sens de Pradines [P_1] du groupoïde d'holonomie au sens de Godbillon.

Remarque 3

Soient (A, a, S) un QF-atlas de S, (x, y) dans $A \underset{S}{\times} A$, U_1 et V_1 des sous-variétés transverses à A' et passant respectivement par x et y. Alors il existe un voisinage ouvert U (respt. V) de x (respt. y) dans U_1 (respt. V_1), et un isomorphisme transverse local [II, 1, df 3] $\sigma : U \longrightarrow V$ tels que $\sigma(x) = y$: en effet soient U_2, V_2, σ_2 comme dans la condition (A_2) de la définition 2 ; U_1 et U_2 (respt. V_1 et V_2) étant des sous-variétés transverses à A' passant par x (respt. y), et quitte à restreindre U_1 et U_2 (respt. V_1 et V_2), il existe un représentant de germe d'holonomie α - connexe $\mu : U_1 \longrightarrow U_2$ (respt. $\nu : V_2 \longrightarrow V_1$) tel que $\mu(x) = x$ (respt. $\nu(y) = y$) ; μ et ν sont aussi des isomorphismes transverses locaux de (A, a, S). Il suffit alors de poser $\sigma = \nu \sigma_2 \mu$, U (respt. V), la source (respt. le but) de μ (respt. de ν).

b) Premiers exemples de QF-atlas

1°) Si S est une variété, (S, id_S, S) est un QF-atlas étale de S.

2°) Soient A une variété à base dénombrable, A' un feuilletage de A, a la projection canonique de A sur A/A' [I, 1] ; alors (A, a, A/A') est un QF-atlas de A/A' : en effet si x et y appartiennent à la même feuille de A', il existe un germe d'holonomie α-connexe tel que $\sigma(x) = y$, d'où (A_2). La condition (A_1) provient de [C] .

3°) Soit S une Q-variété, A un Q-atlas de S [BA], a la projection de A sur S ; on a :

Proposition 2

(A, a, S) est un QF-atlas étale de S.

Démonstration

Nous allons vérifier les conditions $(A_1)'$ et $(A_2)'$ de la proposition 1. Soit $f : B \longrightarrow A$ une application différentiable telle que af soit une application constante ; soit $x_0 \in B$ et posons $g : B \longrightarrow A$ l'application constante prenant la valeur $f(x_0)$; f et g vérifient les hypothèses de la condition b) de la définition de [BA]

page 234, donc elles coïncident sur un voisinage de x_o ; g étant constante, f est constante sur un voisinage de x_o pour tout $x_o \in B$, donc localement constante. La condition $(A_2)'$ provient de la condition a) de [BA] , (page 234).

4°) Soit $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ l'application "valeur absolue", $(\mathbb{R}, a, \mathbb{R}_+)$ est un QF-atlas étale de $\mathbb{R}_+$: si $x, y \in \mathbb{R}$ et $a(x) = |x| = |y| = a(y)$, alors la symétrie par rapport à l'origine ou l'identité est un isomorphisme transverse qui ramène x en y, d'où $(A_2)'$. $(A_1)'$ est évident car pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, $a^{-1}(s)$ contient au plus deux éléments.

Notons que ce QF-atlas n'est pas un Q-atlas, car les germes d'holonomie d'un Q-atlas sont uniques (lorsque la source et le but sont fixés), alors qu'ici l'origine de $\mathbb{R}$ en possède deux : les germes en o de l'application identique et de la symétrie (par rapport à l'origine).

Si on pose plus généralement $\mathbb{R}_+^n = (\mathbb{R}_+)^n$, $a^n = ax.... xa$ (n fois), alors $(\mathbb{R}^n, a^n, \mathbb{R}_+^n)$ est un QF-atlas étale de $\mathbb{R}_+^n$, et n'est pas un Q-atlas.

Observant aussi que $\mathbb{R}_+^n$ est le quotient de $\mathbb{R}^n$ sous l'action du groupe $(\mathbb{Z}_2)^n$, l'exemple (4°) admet la généralisation suivante :

5°) Soit G un groupe discret et dénombrable, opérant différentiablement sur une variété A. Notons S le quotient de A par l'action de G, a la projection canonique de A sur S. Alors (A, a, S) est un QF-atlas étale de S : la condition (A_1) donc $(A_1)'$ résulte de [I, 3, exemple b] ; la condition $(A_2)'$ est évidente.

Signalons que dans l'exemple 5°), (A, a, S) est un Q-atlas si et seulement si l'action de G est libre [BA]. Un cas particulier est traité dans $[P_7]$ en prenant pour G un groupe de Coxeter fini et S l'adhérence $\bar{C}$ de la chambre relative à G.

Nous devons l'exemple suivant à Pradines $[P_9]$, et sur lequel nous reviendrons au paragraphe 2, où apparaîtra toute son importance comme une des motivations profondes de notre théorie :

6°) Posons $D = \mathbb{R} \times \{o\} \subset \mathbb{R}^2$, et soit C le complémentaire de D dans $\mathbb{R}^2$. Soit S le quotient de $\mathbb{R}^2$ par la relation d'équivalence obtenue en identifiant les points de C symétriques par rapport à l'origine et notons p la projection canonique. Alors $(\mathbb{R}^2, p, S)$ est un QF-atlas étale de S. De plus il existe au plus un germe d'isomorphisme transverse de source et but donnés. Ce QF-atlas $(\mathbb{R}^2, p, S)$ n'est pas un Q-atlas car les applications g, f : $R \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définies respectivement par $g(t) = (o, t)$ et $f(t) = (o, -t)$ vérifient les hypothèses de la condition b) de [BA],

(page 234) et ne coïncident qu'à l'origine.

Nous donnerons au paragraphe 2 d'autres exemples de QF-atlas

c) Image et image réciproque de QF-atlas

Définition 6

Soit (A, a, S) un QF-atlas. Un C^r-morphisme f : B ⟶ A est dit transverse (resp. transversal à (A, a, S), s'il l'est à (A, A') [I, 1, df 3], et si ∂f est surjective.

Proposition - définition 3

Soit f: B ⟶ A un C^r-morphisme transversal au QF-atlas (A, a, S) = X. Alors (B, af, S) est un QF-atlas de S qui sera noté f^*X et appelé image réciproque de (A, a, S) par f. Si de plus X est un QF-atlas étale et f un étalement, alors f^*X est un QF-atlas étale de S.

Démonstration

Soit (A, a, S) = X un QF-atlas. Posons

$Y = (B, af, S)$; nous allons vérifier les conditions (A_1) et (A_2) de la définition 2 de [II, 1] . Vérifions (A_1) : le feuilletage B' de B sera l'image réciproque $f^{*}A'$ de A' ; f devient alors un morphisme de la variété feuilletée (B, B') dans la variété feuilletée (A, A'). Par suite les fibres de af qui sont les images réciproques par f des fibres de a sont ouvertes dans B' (car les fibres de a sont ouvertes dans A' d'après la condition (A_1)) ; ce sont aussi des sous-variétés immergées de B [I, prop. 5] (car les fibres de a sont des sous-variétés immergées de A), d'où (A_1).

Vérifions (A_2) : soit $(x, y) \in B \times B$ tel que $a(f(x)) = a(f(y))$. Puisque $B' = f^{*}A'$, d'après la remarque 1 de [I, 1], la restiction de f à une sous-variété U (respt. V) transverse à B', suffisamment petite et passant par x (respt. y) est un difféomorphisme σ (respt. μ) sur une sous-variété U_1 (respt. V_1) transverse à A' et passant par f(x) (respt. f(y)). D'après la remarque 3 de [II, 1], quitte à restreindre U_1 et V_1, on peut supposer qu'il existe un isomorphisme transverse local de ν : $U_1 \longrightarrow V_1$ de $X = (A, a, S)$ tel que $\nu(f(x)) = \nu(f(y))$. Le difféomorphisme $\mu^{-1}\nu\sigma$: $U \longrightarrow V$ est un isomorphisme transverse local de $Y = (B, af, S)$; ceci achève la démonstration de (A_2).

Le reste de la démonstration est sans difficulté : si (A, a, S) est un OF-atlas étale et f un étalement, B' est un feuilletage discret, donc aussi son image réciproque par f.

Nous avons une réciproque partielle de la proposition précédente :

Proposition 4

[II, dfl] Soient (A, a, S) une variété découpée II, dfl, f : B ⟶ A une surmersion telles que (B, af, S) soit un QF-atlas de S. Alors (A, a, S) est un QF-atlas d'image réciproque (B, af, S). Si f est un étalement, et (B, af, S) un QF-atlas étale, alors (A, a, S) est un QF-atlas étale.

Démonstration

Le feuilletage A' de A est donné par la proposition 1 de [I, 1]; f devient alors un morphisme de variétés feuilletées, donc une surmersion de B' sur A' (car f est une surmersion). De plus pour tout $s \in S$, $a^{-1}(s) = f((af)^{-1}(s))$ est un ouvert de A' (car f : B' ⟶ A' est une surmersion) et $(af)^{-1}(s)$ un ouvert de B'), et une sous-variété immergée de A [I, 2, prop. 5] , d'où (A_1). La vérification de (A_2) se fait de façon analogue à celle de la proposition précédente. Le reste de la démonstration est aussi immédiate.

Définition 6'

Avec les hypothèses et les notations de la proposition 4, (A, a, S) est appelé image du QF-atlas (B, af, S).

2) QF-atlas QF-équivalents et QF-variétés

a) QF-atlas QF -équivalents

Soient $X = (A, a, S)$ et $Y = (B, b, S)$ deux variétés découpées. Alors on a une surjection canonique notée (a, b) de la variété somme disjointe $A + B$ sur S, et $X \underset{S}{+} Y = (A + B, (a, b), S)$ est une variété découpée.

Définition 7

Soient $X = (A, a, S)$ et $Y = (B, b, S)$ deux QF-atlas. On dira que X et Y sont QF-équivalents si $X \underset{S}{+} Y$ est un QF-atlas de S.

Remarquons que compte tenu de la remarque 11 de [I, 2], la condition de QF-équivalence ne porte que sur (A_2) car pour tout $s \in S$, $(a, b)^{-1}(s)$ est une somme disjointe de sous-variétés immergées.

La relation de QF-équivalence entre QF-atlas est une relation d'équivalence. Seule la transitivité mérite une indication : soient alors $X = (A, a, S)$, $Y = (B, b, S)$ et $Z = (C, c, S)$ des QF-atlas de S tels que $X \underset{S}{+} Y$ et $Y \underset{S}{+} Z$ soient des QF-atlas ; montrons que $X \underset{S}{+} Z$ est encore un QF-atlas ; la condition (A_1) résulte de la remarque ci-dessus. Vérifions alors (A_2) ; nous identifions ici , ou C à

des ouverts de A + C, B + C ou A + B ; soient $x \in A$ et $z \in C$ tels que $a(x) = c(z) = s$; alors il existe $y \in B$ tel que $b(y) = s$; x et y (respt. y et z) appartiennent à la même fibre de (a, b) (respt. (b, c)). $X \underset{S}{+} Y$ (respt. $Y \underset{S}{+} Z$) étant un QF-atlas de S, il existe un isomorphisme transverse local $\sigma : U \longrightarrow V$ de $X \underset{S}{+} Y$ (respt. $\sigma_1 : U_1 \longrightarrow V_1$ de $Y \underset{S}{+} Z$) tel que $\sigma(x) = y$ (respt. $\sigma_1(y) = z$) ; alors V et U_1 sont deux sous-variétés transverses à Y = (B, b, S) et passant par y ; donc d'après la remarque 3 de [II, 1], on peut supposer, quitte à restreindre U, V, U_1 et V_1, qu'il existe un isomorphisme transverse local de Y, $\sigma_2 : V \longrightarrow U_1$ tel que $\sigma_2(y) = y$. Alors le difféomorphisme $\sigma_1 \sigma_2 \sigma : U \longrightarrow V_1$ est un isomorphisme transverse local de $X \underset{S}{+} Z$ tel que $\sigma_1 \sigma_2 \sigma(x) = z$, d'où (A_2) pour $X \underset{S}{+} Z$.

Dans la suite nous pourrons donc dire plus simplement, s'il n'y a pas risque d'ambiguité, que deux QF-atlas de S sont équivalents s'ils sont QF-équivalents.

La proposition suivante donne une construction de QF-atlas équivalents à un QF-atlas donné. Ce résultat sera très souvent utilisé tout au long de cette théorie.

Proposition 5

Soient $X = (A, a, S)$ un QF-atlas de S, $f : B \longrightarrow A$ un C^r-morphisme transversal à X. Alors X et f^*X [prop. 3] sont des QF-atlas de S équivalents.

Démonstration

Nous devons montrer que $X +_S f^*X = (A + B, (a, af), S)$ est un QF-atlas de S ; comme nous l'avons déjà fait remarquer plus haut, il suffit de vérifier la condition (A_2) ; pour vérifier (A_2) il suffit (en identifiant A et B à des ouverts de A + B), pour $x \in A$ et $y \in B$ tels que $a(x) = a(f(y))$, de prouver l'existence d'un isomorphisme transverse local [df 2], envoyant x en y. Or le feuilletage B' de B étant l'image réciproque par f du feuilletage A' de A, [II, 1, prop. 3], f induit un difféomorphisme [I, 1, remarque 2] $\sigma : U \longrightarrow V$ où U (respt. V) est une sous-variété transverse à B' (respt. A') et passant par y (respt. f(y)) et tel que $\sigma(y) = f(y)$; de plus σ est compatible avec les projections de U et V dans S. D'autre part, comme $a(x) = a(f(y))$, d'après la remarque 3 de [II, 1], il existe un isomorphisme transverse local μ de (A, a, S) de but V et tel que $\mu(x) = f(y)$. Alors $\sigma^{-1}\mu$ est un isomorphisme transverse local de $X +_S f^*X$ transportant x en y.

- En particulier, si X est équivalent à Y, alors $X +_S Y$ est équivalent à X et Y : le difféomorphisme de A ou B dans A + B est transverse à $X +_S Y$.

- si X et Y sont 2 QF-atlas de S et s'il existe des submersions $\varphi : C \longrightarrow A$, $\psi : C \longrightarrow B$ telles que $a\varphi = b\psi$, alors X et Y sont équivalents.

Corollaire 1

Si deux feuilletages sont QF-équivalents au sens introduit en [I, 4, df 20], alors les QF-atlas qui leurs sont canoniquements associés [II, 1, b, 2°)] sont équivalents.

On verra au paragraphe 3 que la réciproque du corollaire 1 est vraie, ce qui justifiera la définition 20 de [I, 4].

Le corollaire suivant sera souvent utilisé

Corollaire 2

Soit X = (A, a, S) un QF-atlas de S.

1°) X est équivalent à un QF-atlas simple $f^{*}X$, image réciproque de X par une surmersion $f : U \longrightarrow A$.

2°) X est équivalent à un QF-atlas étale $g^{*}X$, image réciproque de X par une application $g : W \longrightarrow A$ transverse à X [II, 1, df 6] et surjective.

Pour la démonstration, il suffit d'appliquer la proposition précédente à un étalement surjectif f(resp. une immersion surjective g transverse à A') construit comme dans la démonstration de la proposition 2 de [I, 1].

L'idée essentielle qui se dégage du corollaire 2 est que <u>tout QF-atlas est QF-équivalent à un QF-atlas simple et à un QF-atlas étale</u>.

<u>Remarque importante 3</u>

Nous utiliserons aussi le corollaire 2 sous une forme plus précise que nous allons expliciter : d'après la remarque 8 de [I, 1] et ses notations, on peut supposer dans le corollaire 2 que l'on a

une surmersion $u : A_s \longrightarrow A$

une immersion $v : A_t \longrightarrow A$ qui est surjective

une immersion $u_1 : A_t \longrightarrow A_s$ qui est surjective

une surmersion $u_2 : A_s \longrightarrow A_t$

tels que

a) $X_s = u^* X = (A_s, \alpha u, S)$ est simple

b) $X_t = v^* X = (A_t, \alpha v, S)$ est étale

c) $u_2 u_1 = id_{A_t}$

d) $v u_1 = u$

e) u_1 est transverse à X_s

On en déduit que :

f) $u_1^* X_s = u_1^*(v^* X) = (v u_1)^* X = u^* X = X_t$

D'autre part si $y \in A_s$, u_1 étant surjective, il existe $x \in A_t$ tel que $u_1(x) = y$; par suite on a :

$av(y) = a\ v\ u_1(x) = a\ u\ (x)$; donc
$a\ u\ u_2\ (y) = a\ u\ u_2\ u_1\ (x) = a\ u\ (x)$, (d'après (c)), et alors $a\ u\ u_2\ (y) = a\ v\ (y)$. d'où

g) $av = a\ u\ u_2$

On déduit de a) et de g) que $X_s = (A_s, av, S) = (A_s, a\ u\ u_2, S) = u_2^{*}\ (A_s, au, S)$; d'où

h) $X_s = u_2^{*}\ X_t$.

Nous pouvons résumer tout ce qui précède de la façon suivante : soit $X = (A, a, S)$ un QF-atlas de S. Il existe des surmersions $u : A_s \longrightarrow A$, $v : A_s \longrightarrow A_t$, des immersions surjectives $u_1 : A_t \longrightarrow A_s$, $u_2 : A_t \longrightarrow A$ telles que :

$u^{*} X = X_s$ est un QF-atlas simple

$v^{*} X = X_t$ est un QF-atlas étale

$X_s = u_1^{*} X_t$

$X_t = u_2^{*} X_s$

et tous ces atlas sont équivalents (prop. 5).

b) Autres exemples de QF-atlas

Nous sommes maintenant en mesure de donner d'autres exemples de QF-atlas

1°) QF-atlas canonique d'un F-atlas

Nous avons :

Proposition 6

Soit S une F-variété $[M]$. Tout F-atlas de S détermine canoniquement un QF-atlas de S.

Démonstration

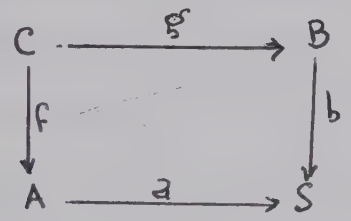
En effet si $(V_i, V'_i, \widetilde{V}_i, \widetilde{\Pi}_i)_{i\in I}$ est un F-atlas de S ($[M]$ ou $[I, 4, d]$), posons $V = \sum_{i\in I} V_i$, $V' = \sum_{i\in I} V'_i$; V' définit un feuilletage de V donc chaque feuille est difféomorphe à une feuille d'un V'_i ; définissons $p : V \longrightarrow S$ par la condition que $p\big|_{V_i} = \Pi_i$ et montrons que (V, p, S) est un QF-atlas de S. Pour tout $s \in S$, $p^{-1}(s)$ s'identifie à une somme de feuilles des V'_i, donc c'est un ouvert de V' : c'est aussi une sous-variété immergée de V [I, 2, remarque 11]. D'où (A_1). (A_2) résulte du lemme suivant :

Lemme 1

Soient (A, A') et (B, B') deux variétés feuilletées à base dénombrable, de projections canoniques respectives a : A $\longrightarrow$ A/A', b : B $\longrightarrow$ B/B'. Supposons A' et B' QF-équivalents avec une bijection u : A/A' $\longrightarrow$ B/B' [I, 4, df 19]. Si A/A' = B/B' = S et u = id_S, alors les QF-atlas (A, a, S) et (B, b, S) canoniquement associés à (A, A') et (B, B') [II, 1, b, 1°], sont QF-équivalents [II, df 7].

Démonstration

D'après la définition de la QF-équivalence des feuilletages il existe des surmersions f : C $\longrightarrow$ A, g : C $\longrightarrow$ B telles que le diagramme suivant commute ensemblistement :



On sait [I, 4, remarque 16], que $f^*A' = g^*B'$; donc les QF-atlas $f^*(A, a, S) = (C, af, S)$ et $g^*(B, b, S)) = (C, bg, S)$ coïncident ; D'après la proposition 5, (A, a, S) et (C, af, S) (respt. (B, b, S) et (C, bg, S) = (C, af, S) sont QF-équivalents, donc (A, a, S) et (B, b, S) sont QF-équivalents par transitivité de la QF-équivalence.

Démontrons maintenant (A_2) : si $(x, y) \in V \underset{S}{\times} V$, il existe i et j tels que $x \in V_i$ et $y \in V_j$. Comme $p(x) = p(y)$, $W_i = \pi_i^{-1}(\tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j)$ et $W_j = \pi_j^{-1}(\tilde{V} \cap \tilde{V}_j)$ sont des ouverts non vides (car $x \in W_i$ et $y \in W_j$) de V_i et V_j respectivement. Les feuilletages W'_i et W'_j de W_i et W_j induits respectivement par V'_i et V'_j sont F-équivalents [I, 4, df 20], donc QF-équivalents. D'après le lemme 1, $(W_i, \pi_i \mid_{W_i}, \tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j)$ et $(W_j, \pi_j \mid_{W_j}, \tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j)$ sont des QF-atlas F-équivalents de $\tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j$; il existe donc un difféomorphisme transverse σ (à W'_i et W'_j) de source contenant x et de but contenant y tel que $\sigma(x) = y$ et compatible avec les projections sur $\tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j$). On en déduit (A_2) car W_i et W_j s'identifient à des ouverts de V.

2°) Si S est une variété et $a : A \longrightarrow S$ une surmersion, alors (A, a, S) est un QF-atlas de S, QF-équivalent au QF-atlas (S, id_S, S) dont il est image réciproque par a.

3°) Soient A et B des variétés à base dénombrable, A' un feuilletage de A, (A, a, A/A') le QF-atlas canonique associé [II, 1, 2°)]. Pour tout morphisme de variétés $f : B \longrightarrow A$ transversal à A', (B, af, A/A') est un QF-atlas QF-équivalent à (A, a, A/A').

c) Définition et exemples de QF-variétés

Définition 8

Soit S un ensemble. Une structure de QF-variété sur S est une classe de QF-équivalence de QF-atlas de S.

Nous obtenons des exemples de QF-variétés en considérant les classes de QF-équivalence des différents QF-atlas déjà cités, notamment :

1°) Toute variété différentaible S possède une structure canonique de QF-variété : c'est la classe de QF-équivalence du QF-atlas (S, id_S, S).

De façon précise, si deux structures de variétés S' et S'' définissent sur le même ensemble sous-jacent S la même structure de QF-variété, alors $S' = S''$: en effet $(S' + S'', (id_{S'}, id_{S''}), S)$ devant être un QF-atlas étale de S, la condition $(A_2)'$ [prop. 1] signifie que l'application identique est localement un difféomorphisme de S' dans S'', donc un difféomorphisme.

Désormais nous pourrons donc identifier toute variété différentiable S à sa structure canonique de QF-variété sous-jacente. Nous caractériserons au paragraphe suivant tous les QF-atlas de S.

2°) Toute Q-variété S [BA], s'identifie canoniquement à une QF-variété : si (A, a) est un Q-atlas de S, la structure de QF-variété de S est la QF-classe du QF-atlas (A, a, S) [II, 1, b, 3°)].

De la même manière qu'au 1°), nous pouvons énoncer :

Proposition 7

Si deux structures S' et S" de Q-variétés sur le même ensemble sous-jacent S déterminent la même structure de QF-variété sur S, alors S' = S".

Démonstration

Il revient au même de montrer que deux Q-atlas de S sont Q-équivalents si et seulement si les QF-atlas canoniques qu'ils déterminent sont QF-équivalents. Il est évident, d'après les définitions 16 de [I, 4] (de Q-équivalence) et 7 de [II, 2] (de QF-équivalence), que si deux Q-atlas sont Q-équivalents, les QF-atlas qui leurs sont canoniquement associés sont QF-équivalents. Réciproquement, soient X = (A, a, S) et Y = (B, b, S) deux Q-atlas de S QF-équivalents. On sait alors [df 7], que $X \underset{S}{+} Y = ((A + B), (a,b), S)$ est un QF-atlas étale de S, QF-équivalent à X et à Y ; le reste de la démonstration résulte du lemme plus général suivant :

Lemme 2

Soit S une Q-variété. X = (A, a, S) un Q-atlas de S, Z = (C, c, S) un QF- atlas étale de S QF-équivalent à X (considéré comme QF-atlas de S). Alors Z est un Q-atlas de S.

Démonstration du lemme 2

Vérifions que Z est un Q-atlas de S. Montrons que Z satisfait à la définition de la page 234 de [BA]. La condition a) résulte de $(A_1)'$ de la proposition 1 de [II, 1]. Soit maintenant f, g : T $\longrightarrow$ C deux morphismes de variétés tels que cf = cg et montrons que $T_o = \{t \in T$ tel que f (t) = g (t)$\}$ est un ouvert de T. Si $t_o \in T_o$, posons $f(t_o) = g(t_o) = y$ et choisissons x dans A tel que a(x) = c(y) ; X et Z étant des QF-atlas QF-équivalents et étales, il existe un difféomorphisme local σ défini sur un voisinage ouvert U de y et tel que $a\sigma = c$, $\sigma(y) = x$. Les applications f et g étant différentiables, il existe un voisinage ouvert V de t_o dans T tel que $f(V) \subset U$ et $g(V) \subset U$; puisque X est un Q-atlas, on peut appliquer la condition b) de [BA] précitée au couple d'applications différentiables σf et σg : σf et σg sont donc localement égales sur V, donc aussi f et g (car σ est un difféomorphisme).

De même que pour les variétés différentiables, nous identifierons toute Q-variété à sa structure unique de QF-variété sous-jacente.

Si S est une Q-variété, considérée comme QF-variété, ses seuls QF-atlas étales sont les Q-atlas.

Remarque 4

L'exemple 4°) de [II, 1, b] de QF-atlas munit $\mathbb{R}_+$ d'une structure de QF-variété, et cette QF-variété n'est pas une Q-variété, car le QF-atlas étale $(\mathbb{R}, a, \mathbb{R}_+)$ n'est pas un Q-atlas.

Il existe donc des QF-variétés qui ne proviennent pas de Q-variétés.

Mieux encore,

Remarque 4'

Il est démontré dans [P_9] que le QF-atlas de l'exemple 6° de [II, 1, b] est QF-équivalent à un feuilletage [II, 1, df 5] dont tous les groupes d'holonomie sont nuls ; par suite :

Il existe des feuilletages de variétés paracompactes sans holonomie dont le quotient n'est pas une Q-variété.

Cet exemple contredit une affirmation de Barre [BA], et prouve que la théorie des Q-variétés qui conserve toute sa valeur intrinsèque, à besoin d'être étendue si on veut "récupérer" les quotients au moins de "bons" feuilletages. La théorie des QF-variétés va dans ce sens.

3°) Reprenons le cas particulier de QF-atlas $(\mathbb{F}^n, a, \bar{C})$ signalé en [II, 1, b, 5°)]. $\bar{C}$ est munie d'une structure canonique de QF-variété. Il est démontré dans $[P_7]$ que le QF-atlas $(\mathbb{F}^n, a, \bar{C})$ est QF-équivalent à un QF-atlas qui est un feuillage [df 5] ou plus précisement un feuilletage.

4°) Toute F-variété [M] possède une structure canonique de QF-variété obtenue en considérant la QF-classe d'équivalence du QF-atlas canonique dont la construction est indiquée dans la proposition 6 de [II, 1] ; de façon précise nous avons :

Proposition 8

Soit S une F-variété. Si deux F-atlas de S sont F-équivalents [I, 5, df 22], alors les QF-atlas canoniques qu'ils définissent [prop 6] sont QF-équivalents.

Démonstration

En effet le F-atlas maximal d'une F-variété S définit canoniquement un QF-atlas (A, a, S) de S [prop 6], donc une structure de QF-variété sur S. Pour tout autre QF-atlas (B, b, S) provenant canoniquement [prop 6] d'un F-atlas de S, B s'identifie à un ouvert de A par une application g : B $\longrightarrow$ A qui est en particulier une submersion ; il suffit alors d'appliquer la proposition 5 de [II, 2], car (B, bg, S) = $g^{\#}$ (A, a, S).

La proposition précédente conduit tout naturellement aux questions difficiles suivantes :

(i) Deux structures de F-variétés sur le même ensemble sous-jacent S peuvent-elles induire la même structure de QF-variété sur S ?

(ii) Toute QF-variété peut-elle, moyennant une condition de dénombrabilité, s'obtenir canoniquement [prop 6] à partir d'une F-variété ?

Nous donnerons au paragraphe 3 de ce chapitre une réponse partielle, traitée dans $[P_7]$, à la première question, et cela lorsque nous aurons approfondi un peu plus l'étude des QF-variétés.

d) Topologie des QF-variétés et sous-QF-variétés ouvertes.

1°) Topologie des QF-variétés

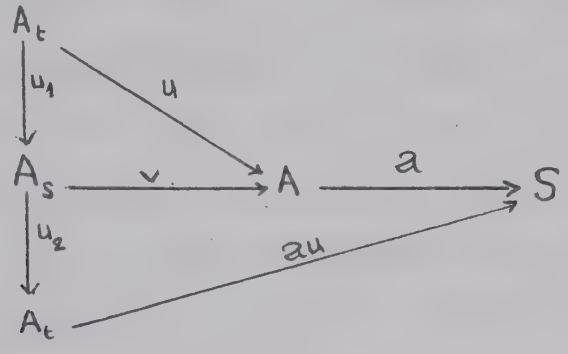
Soit S une QF-variété. Nous allons définir une topologie sur S, qui, pour chaque QF-atlas (A, a, S), va coïncider avec la topologie quotient (pour la relation d'équivalence définie sur A par l'application a).

(i) Soit X = (A, a, S) un QF-atlas étale de S. S est un espace topologique pour la topologie quotient. Cette topologie est indépendante du QF-atlas étale (A, a, S) ; en effet si Y = (B, b, S) est un autre QF-atlas étale de S QF-équivalent à X = (A, a, S), U un ouvert de S (pour la

topologie définie par X), montrons que $b^{-1}(U)$ est un ouvert de B ; si $z \in U$, il existe $x \in A$, $y \in B$ tels que $a(x) = b(y) = z$, et un difféomorphisme local σ de A dans B tel que $\sigma(x) = y$ et $b\sigma = a$. Comme $x \in a^{-1}(U)$ et que $a^{-1}(U)$ est un ouvert de A, on peut supposer que la source W du difféomorphisme σ est contenue dans $a^{-1}(U)$; donc $\sigma(W)$ est un ouvert de B tel que $y \in \sigma(W)$, $b\sigma(W) = a(W) \subset U$. Par suite $b^{-1}(U)$ est un ouvert de B.

Notons $\mathcal{T}_S$ la topologie ainsi définie sur S.

(ii) Pour tout QF-atlas X = (A, a, S) de S (non nécessairement étale), la topologie $\mathcal{T}_S$ sur S définie en (i) coïncide avec la topologie quotient $\mathcal{T}$ (définie sur S par X). Rappelons d'abord [I, 1, remarque 8] et [II, 2, remarque 3] qu'au QF-atlas X nous pouvons associer un diagramme du type :



tel que (A_t, au, S) soit un QF-atlas étale de S (QF-équivalent à (A, a, S)), v et u_2 des submersions surjectives, u et u_1 des immersions surjectives. Soit U un ouvert de S pour $\mathcal{T}_S$.

alors $(au)^{-1}(U) = V$ est un ouvert de A_t ; v étant une submersion $v(u_2^{-1}(W))$ est un ouvert de A ; puisque v est surjective et d'après la commutativité du diagramme ci-dessus, $v(u_2^{-1}(V)) = v(u_2^{-1}(au)^{-1}(U)) = v(u_2^{-1}u^{-1}\ a^{-1}(U)) = v(auu_2)^{-1}(U) = v(av)^{-1}(U) = v(v^{-1}(a^{-1}(U))) = a^{-1}(U)$; donc $a^{-1}(U)$ est un ouvert de A et U un ouvert pour $\mathcal{C}$. Inversement si U est un ouvert pour $\mathcal{C}$, $a^{-1}(U)$ est un ouvert de A ; donc $u^{-1}(a^{-1}(U)) = (au)^{-1}(U)$ est un ouvert de A_t et U est alors un ouvert pour $\mathcal{C}_S$.

Nous déduisons de (i) et (ii) que la topologie $\mathcal{C}_S$ ne dépend pas du QF-atlas choisi et coïncide, pour chaque QF-atlas, avec la topologie quotient correspondante.

Remarque 5

Pour tout QF-atlas (A, a, S), la relation d'équivalence définie sur A par a est ouverte : c'est évident si (A, a, S) est un QF-atlas étale car à l'aide des isomorphismes transverses locaux, on voit que le saturé d'un ouvert de A peut s'écrire comme réunion d'ouverts de A. Si (A, a, S) est un QF-atlas quelconque, soit Ω un ouvert de A. D'après le diagramme précédent $(au)(u^{-1}(\Omega)) = a(\Omega)$ car u est surjective. Or l'atlas (A_t, au, S) étant étale, $(au)(u^{-1}(\Omega))$ est un ouvert de S, donc aussi $a(\Omega)$.

Définition 9

$\mathcal{T}_S$ sera appelée topologie de S.

Des exemples classiques (quotients de feuilletages par exemple) montrent que cette topologie peut être d'une grande complexité.

2°) Sous-QF-variété ouverte et recollement

Soit S une QF-variété, U un ouvert de S (pour la topologie $\mathcal{T}_S$ définie plus haut). Alors pour tout QF-atlas étale (A, a, S) de S, $(a^{-1}(U), a\big|_{a^{-1}(U)}, U)$ est un QF-atlas étale de U (la vérification est immédiate). On en déduit alors une structure de QF-variété sur U, et il est facile de vérifier que cette structure est indépendante du QF-atlas étale choisi. De plus pour tout autre atlas (B, b, S) de S équivalent à (A, a, S), $(b^{-1}(U), b\big|_{b^{-1}(U)}, U)$ est un QF-atlas de U QF-équivalent au précédent.

Définition 10

Soit S une QF-variété. Une partie U est une sous QF-variété ouverte de S si elle est un ouvert de S pour la topologie $\mathcal{T}_S$.

Toute sous-QF-variété ouverte est donc canoniquement une QF-variété.

Proposition 9

Soient S un ensemble, $(S_i)_{i\in I}$ une fa-

rille de QF-variétés telles que $S = \bigcup_{i\in I} S_i$. Si pour tous $i, j \in I$, $S_i \cap S_j$ est une sous-QF-variété ouverte à la fois de S_i et de S_j, alors il existe sur S une unique structure de QF-variété telle que les S_i en soient des sous-QF-variétés ouvertes **pour tout $i \in I$.**

Démonstration

(i) existence Soit $X_i = (A_i, a_i, S_i)$, $i \in I$, un QF-atlas étale de S_i (il en existe toujours).

Posons $A = \sum_{i\in I} A_i$ (variété somme disjointe des A_i), $a = (a_i)$ la projection de A sur S. On va vérifier que (A, a, S) est un QF-atlas étale de S : la propriété (A_1) (donc $(A_1)'$) s'obtient en appliquant la remarque 11 de [I, 2]. Pour démontrer $(A_2)'$, considérons $x, y \in A$ tels que $a(x) = a(y)$; il existe $i, j \in I$ tels que $x \in A_i$ et $y \in A_j$ (on identifie les A_i à des ouverts de A) ; donc $a(x) = a(y)$ appartient à $S_i \cap S_j$. Comme $S_i \cap S_j = S_{ij}$ est une sous-QF-variété ouverte à la fois de S_i et de S_j, les QF-atlas étales $(a_k^{-1}(S_{ij})$, $a_k \Big|_{a_k^{-1}(S_{ij})}, S_{ij})$ $k = i, j$, sont QF-équivalents ; $(A_2)'$ en résulte car $x \in a_i^{-1}(S_{ij})$ et $y \in a_j^{-1}(S_{ij})$; d'où l'existence, car il est évident que les S_i sont des ouverts de S.

Unicité

- Montrons d'abord que deux QF-atlas de S obtenus par le procédé ci-dessus sont QF-équivalents. Soient (A, a, S) et (B, b, S) deux QF-atlas étales de S construits à partir des familles de QF-atlas $(X_i)_{i\in I} = (A_i, a_i, S_i)_{i\in I}$ et $(Y_i)_{i\in I} = (B_i, b_i, S_i)_{i\in I}$. Alors $(A + B, (a, b), S)$ est aussi un QF-atlas de S, car il provient de la famille de QF-atlas $X_i + Y_i = (A_i + B_i, (a_i, b_i), S_i)$.
S_i

- Pour montrer l'unicité, il suffit de montrer que tout QF-atlas étale de S est QF-équivalent à un QF-atlas du type précédent : en effet soit (A, a, S) un QF-atlas étale quelconque de S; comme S_i est un ouvert de S, $A_i = a^{-1}(S_i)$ est un ouvert de A et (A_i, a_i, S_i) où $a_i = a|_{A_i}$ est un QF-atlas étale de S_i. On a un étalement surjectif u de ΣA_i (variété somme disjointe des A_i) sur A. D'après (i), $(\Sigma A_i, a\,u, S)$ est un QF-atlas étale de S ; c'est aussi le QF-atlas étale image réciproque de (A, a, S) par l'étalement u [II, 1, prop 3]. Par suite [prop 5], les deux QF-atlas étales sont équivalents. D'où l'unicité.

Proposition 9'

Soit $(S_i)_{i \in I}$ une famille de QF-variétés.

1°) Il existe sur $S = \bigsqcup_{i \in I} S_i$ (réunion disjointe) une structure unique de QF-variété telle que les S_i en soient des QF-variétés ouvertes .

2°) Si I est fini, $P = \prod_{i \in I} S_i$ possède une structure canonique de QF-variété.

Démonstration

Le 1°) résulte de la proposition 9. Pour établir le 2°), pour chaque $i \in I$, considérons un QF-atlas (A_i, a_i, S_i) de I ; posons $A = \prod_{i \in I} A_i$, $a = \prod_{i \in I} a_i$ et montrons que (A, a, P) est un QF-atlas de S. La condition (A_1) est évidente en considérant sur A le feuilletage produit des feuilletages A'_i. (A_2) est évident car si $x = \prod_{i \in I} x_i \in A$, $y = \prod_{i \in I} y_i \in A$ et $a(x) = a(y)$, alors pour chaque i, $a_i(x_i) = a_i(y_i)$; d'après (A_2) appliqué au QF-atlas (A_i, a_i, S_i), il existe un isomorphisme transverse σ_i de (A_i, a_i, S_i) tel que $\sigma_i(x_i) = y_i$. Alors $\sigma = \prod_{i \in I} \sigma_i$ définit un isomorphisme transverse de A tel que $\sigma(x) = y$.

3-Groupoïde d'holonomie des QF-atlas et caractérisations des QF-atlas équivalents

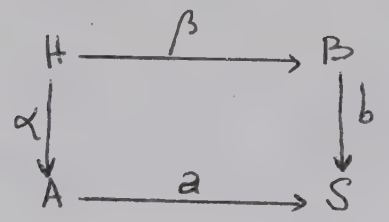
a) Notion de QF-carré

Rappelons que $\mathcal{E}$ désigne la catégorie des applications, $\mathcal{D}$ la catégorie des applications différentiables.

Définition 10

Un diagramme commutatif dans $\mathcal{E}$ de la forme

(1)



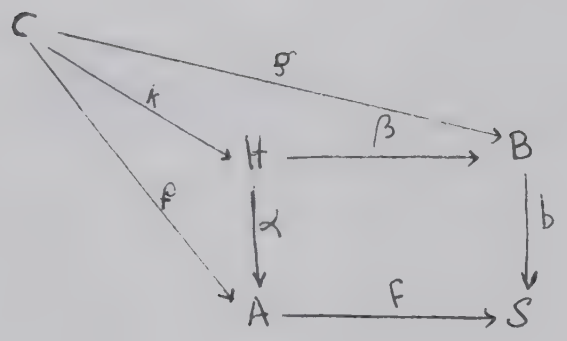
(où a et b sont surjectives), est un QF-carré si les propriétés suivantes sont satisfaites :

$(QF)_0$: α et β sont des surmersions

$(QF)_1$: $(\beta, \alpha) : H \longrightarrow B \times A$ est surjective sur $B \underset{S}{\times} A$,

$(QF)_2$: $(\beta, \alpha) : H \longrightarrow B \times A$ est une immersion.

$(QF)_3$: pour tout couple de submersions $f : C \longrightarrow A$ et $g : C \longrightarrow B$ tel que $af = bg$, il existe un unique morphisme de variétés $k : C \longrightarrow H$ tel que le diagramme suivant soit commutatif dans $\mathcal{E}$:



$(QF)_4$: Soient $f : C \longrightarrow A$ et $g : C \longrightarrow B$ des applications différentiables telles que $af = bg$ soit une application constante. Alors pour tout $z \in C$, il existe un voisinage ouvert Ω de z dans C, une application différentiable $k_1 : \Omega \longrightarrow H$ tels que $\alpha k_1 = f|_\Omega$ et $\beta k_1 = g|_\Omega$.

Définition 11

On dira que le QF-carré est une QF-fourche si $A = B$ et $a = b$.

Notations

Un QF-carré sera représenté par l'octuplet $K = (H, A, B, S; \alpha, \beta, a, b,)$, et une QF-fourche par $(H, A, S ; \alpha, \beta, a)$.

Remarquons que dans $(QF)_4$, k_1 n'est pas unique.

Exemples de QF-carrés

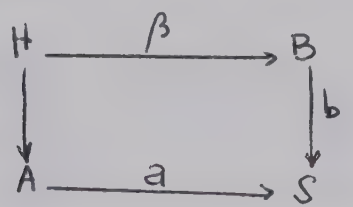
1°) Soient S une variété, a : A $\longrightarrow$ S et b : B $\longrightarrow$ S deux surmersions ; posons $H = A \underset{S}{\times} B$, $\alpha = Pr_1 : H \longrightarrow A$ $\beta = Pr_2 : H \longrightarrow B$; il est évident que (H, A, B, S ; α, β, a, b) est un QF-carré.

2°) Soient S une Q-variété $[BA]$, (A, a, S) un Q-atlas de S ; posons $H = A \underset{S}{\times} A$, $\alpha = Pr_1 : H \longrightarrow A$ $\beta = Pr_2 : H \longrightarrow A$. On sait que $[BA]$, H est une sous-variété immergée de A x A. Il est facile de vérifier que (H, A, S ; α, β, a) est une QF-fourche.

La suite de notre étude nous donnera une méthode pour construire des QF-carrés et par conséquent en multiplier les exemples.

Remarque 6

Si dans un QF-carré



(A, a, S) est un QF-atlas de S, alors (B, b, S) est aussi un QF-atlas de S équivalent à (A, a, S) : en effet (H, aα , S) est un QF-atlas image réciproque de (A, a, S) par α , donc

équivalent à ce dernier [prop. 5]. On déduit de la proposition 4 que (B, b, S) est aussi un QF-atlas équivalent à (H, $a\alpha = b\beta$, S), donc à (A, a, S).

Remarque 7

Si dans un QF-carré (A, a, S) et (B, b, S) sont des QF-atlas étales, alors la propriété $(QF)_4$ est équivalente à la condition $(QF)'_4$: si $f : C \longrightarrow A$ et $g : C \longrightarrow B$ sont des applications différentiables telles que $af = bg$ soit une application constante, alors f et g sont localement constantes.

En effet $(QF)_4$ implique $(QF)'_4$ d'après la condition $(A_2)'$ [prop. 1] ; la réciproque est facile à montrer, car si $z \in C$, on peut supposer que f et g sont constantes sur un voisinage Ω de z ; comme a $f(z) = b\,g(z)$, d'après $(QF)_1$, il existe $x \in H$ tel que $\alpha(x) = f(z)$ et $\beta(x) = g(z)$. L'application constante $k_1 : \Omega \longrightarrow H$ égale à x satisfait à la conclusion de $(QF)_4$.

Il en résulte que dans ces conditions, les factorisations locales de $(QF)_4$ définissent une factorisation globale qui est localement constante, car f et g sont constantes sur chaque composante connexe de C.

On peut aussi voir, dans les mêmes hypothèses, que :

Remarque 7'

$(QF)'_4$ est équivalente à la condition $(QF)''_4$: toute application différentiable $f : C \longrightarrow A$ telle que af soit une application constante, est localement constante. En effet si f est une telle application, soit $z \in C$, il existe $y \in B$ tel que $b(y) = af(z)$ (car b est surjective); si $g : C \longrightarrow B$ est l'application constante prenant la valeur y, on peut appliquer $(QF)'_4$ au couple d'applications $f : C \longrightarrow A$ et $g : C \longrightarrow B$, donc f (et g) est localement constante. La réciproque est évidente.

Remarque 8

(i) La condition $(QF)_3$ implique qu'un QF-carré est uniquement déterminé par la donnée des deux triplets (A, a, S) et (B, b, S).

(ii) Le diagramme représentant un QF-carré est ensemblistement cocartésien ; d'après $(QF)_1$, on se ramène au carré cartésien suivant dans la catégorie $\mathcal{E}$:

$$\begin{array}{ccc} A \underset{S}{\times} B & \xrightarrow{Pr_2} & B \\ \downarrow{\scriptstyle Pr_1} & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ A & \xrightarrow{a} & S \end{array}$$

qui est cocartésien car $b\,Pr_2 = a\,Pr_1$ est surjective.

On en déduit donc que la donnée de H, A, B, α et β déterminent complètement S, a, b (à une bijection unique près).

Remarque 9

L'immersion $(\beta, \alpha) : H \longrightarrow B \times A$ est une extraction [I, 2, df 10] : en effet si $u\, v = (\beta, \alpha)$ est la factorisation canonique de (β, α) à travers la variété des germes des sous-variétés de $B \times A$ [I, 2, df 9], v est un étalement. Soit alors $x, y \in H$ tels que $v(x) = v(y)$; v induit un difféomorphisme v_x (respt v_y) d'un voisinage ouvert de x (respt. y) sur un voisinage W de $v(x) = v(y)$. Les submersions $Pr_1\,(u|_W)$ et $Pr_2\,(u|_W)$ satisfont aux hypothèses de $(QF)_3$ et admettent les factorisations v_x^{-1} et v_y^{-1} qui sont distinctes si $x \neq y$.

Définition 12

On dira qu'un QF-carré est un Q-carré (respt. un carré de Godement) si l'immersion (β, α) est stricte (respt. est un plongement).

Dans un Q-carré, $(\beta, \alpha) : H \longrightarrow B \times A$ est donc injective [I, 2, prop. 6], et H s'identifie à $B \underset{S}{\times} A$ qui possède alors une structure de sous-variété immergée de $B \times A$ [I, 2, df. 8].

Remarque 9'

Si le carré (1) de la définition 10 est un Q-carré, on peut remplacer les conditions $(QF)_3$ et $(QF)_4$

par l'unique condition équivalente suivante :

$(QF)_3$ bis : pour tout couple d'applications différentiables $f : C \longrightarrow A$ et $g : C \longrightarrow B$ telles que $af = bg$, il existe une unique application différentiable $h : C \longrightarrow H$ telle que $\alpha h = f$ et $\beta h = g$.

La démonstration de l'équivalence est facile à établir.

Ceci montre en particulier que la définition de carré de Godement introduite ici est en accord avec celle de $[P_5]$.

Les terminologies que nous avons introduites ici trouveront leurs justifications au paragraphe b), paragraphe dans lequel nous établissons une "correspondance" entre les notions de QF-carrés (respt. Q-carrés, carrés de Godement) et les QF-variétés (respt. Q-variétés, variétés).

Définition 13

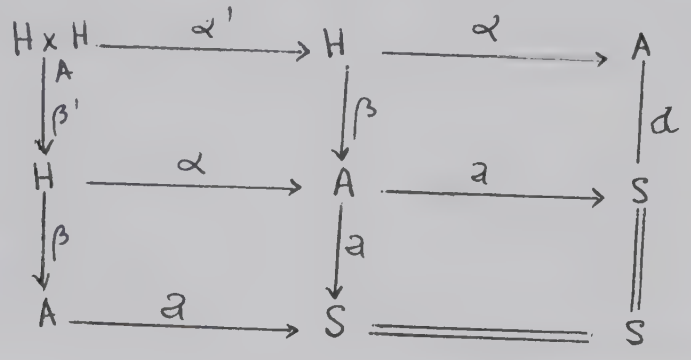
Une Q-fourche (respt. une fourche) est un Q-carré (respt. carré de Godement) qui est une QF-fourche (considéré comme QF-carré).

Proposition 10

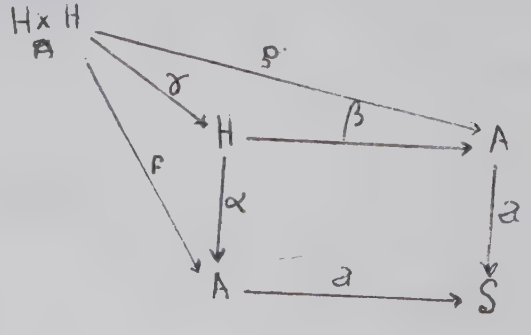
Soit $(H, A, S; \alpha, \beta, a)$ une QF-fourche. Alors H possède une structure canonique de groupoïde différentiable de base A et de quotient d'intransitivité S.

Démonstration

Les applications source et but seront respectivement α et β. Définissons la loi de composition partielle sur H en considérant le diagramme ensemblistement commutatif suivant :

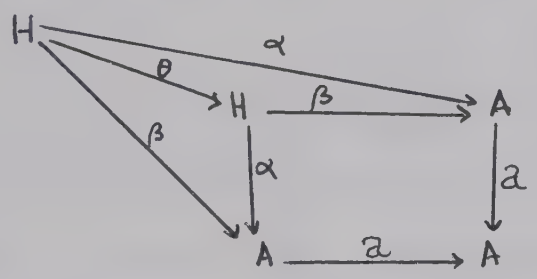


Appliquant $(QF)_3$ au couple de submersions $f = \alpha\alpha' : H \underset{A}{\times} H \longrightarrow A$ et $g = \beta\beta' : H \underset{A}{\times} H \longrightarrow A$, on déduit une unique application différentiable $\gamma : H \underset{A}{\times} H \longrightarrow H$ rendant le diagramme suivant commutatif :



pour $(x, y) \in H \underset{\alpha = \beta}{\times} H$, nous définissons le produit en posant $xy = \gamma(x, y)$. Les diagrammes ci-dessus permettent de vérifier que $\alpha\gamma(x, y) = \alpha(y)$ et $\beta\gamma(x, y) = \beta(x)$; l'associativité se vérifie en appliquant également $(QF)_3$.

Pour définir l'inverse, on appliquera $(QF)_3$ au couple de submersions $\beta, \alpha : H \longrightarrow A$, d'où une factorisation $\theta : H \longrightarrow H$ rendant commutatif le diagramme :



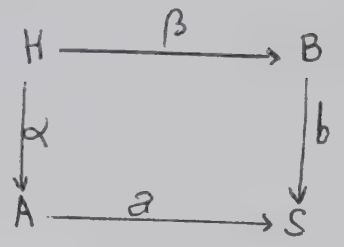
De ce diagramme on déduit que $\alpha\theta\theta = \beta\theta = \alpha$ et $\beta\theta\theta = \alpha\theta = \beta$; donc $(QF)_3$ $\theta\theta = \mathrm{id}$ et θ est un difféomorphisme involutif. Pour $x \in H$, on posera $x^{-1} = \theta(x)$.

Le reste de la démonstration découle directement de $(QF)_0$, $(QF)_1$ et $(QF)_2$.

Proposition 11

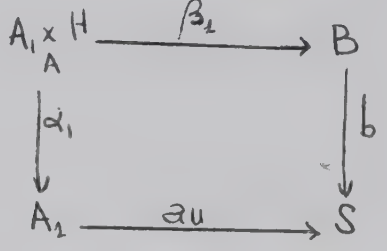
Soient

(K)



un QF-carré , u : $A_1 \longrightarrow A$ une submersion telle que a u soit surjective. Alors

(u^*K)



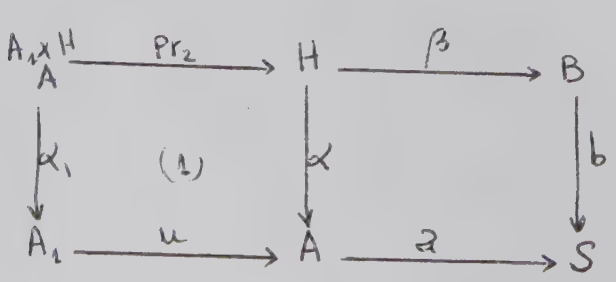
où $\alpha_1 = Pr_1$ et $\beta_1 = \beta Pr_2$, est un QF-carré.

K est un Q-carré (resp. carré de Godement) si et seulement si u^*K en est un.

Démonstration

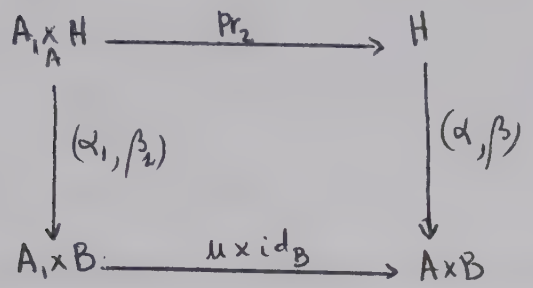
Nous avons les diagrammes suivants :

(I)



qui est ensemblistement commutatif, et

(II)



qui est cartésien dans $\mathcal{D}$.

Le carré (1) du diagramme (I) étant cartésien par construction, α_1 est une surmersion ; a u étant surjective, et d'après $(QF)_1$ appliqué à K, $\beta_1 = \beta Pr_2$ est une submersion surjective. D'où $(QF)_0$ pour u^*K. Pour vérifier $(QF)_1$ pour u^*K, il suffit de remarquer que si $(x, y) \in A_1 \underset{S}{\times} B$, alors $(u(x), y) \in A \underset{S}{\times} B$ et d'appliquer $(QF)_1$ à K. $(QF)_2$ résulte du diagramme cartésien (II) ; $(QF)_3$ et $(QF)_4$ se vérifient en appliquant respectivement $(QF)_3$ et $(QF)_4$ à K et le fait que le carré (1) du diagramme (I) est cartésien.

La démonstration de la deuxième partie de la proposition résulte de la première partie et de la proposition 5 de [I, 2] appliquée au diagramme (II).

b) Groupoïde d'holonomie des QF-atlas

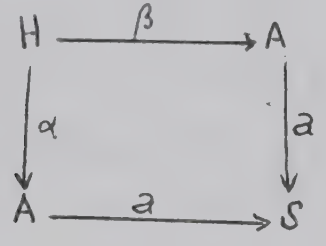
Le résultat suivant, fondamental dans notre théorie, établit un lien étroit entre les notions de groupoïdes transhomogènes [I, 4, df.13], de QF-atlas [II, 1, df.1] et de QF-fourche [II, 3, df 11].

Théorème 1

Soit (A, a, S) une variété découpée. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1°) (A, a, S) est un QF-atlas de S.

2°) Il existe une QF-fourche



3°) Il existe un groupoïde différentiable transhomogène H(A) de base A et tel que $\Pi_{H(A)} H(A) = A \underset{S}{\times} A$.

Démonstration

1°) $\Longrightarrow$ 2°) : Soit (A, a, S) = X un QF-atlas de S. Rappelons d'abord [cf II, 2, remarque 3 dont on reprend les notations], que l'on a un étalement surjectif $v : A_s \longrightarrow A$, une immersion surjective $u : A_t \longrightarrow A$ transverse à X [II, df. 6], une surimmersion $u_o : A_o \longrightarrow A_t$, et une immersion surjective

$u_1 : A_t \longrightarrow A_s$ tels que :

- $X_s = v^{*}X = (A_s, av, S)$ est un QF-atlas simple de S
- u_1 est transverse à X_s
- $X_t = u^{*}X = u_1{}^{*}X_s = (A_t, au, S) = (A_t, avu_1, S)$

est un QF-atlas étale de S

- $X_s = u_1^{*} X_t$

Nous ferons la démonstration en plusieurs étapes :

<u>lere étape</u> : <u>(A, a, S) est un QF-atlas étale de S</u>

Le faisceau des germes des difféomorphismes locaux de A, muni de sa topologie de faisceau, est une variété étalée sur A par les applications source et but. C'est aussi un ouvert de la variété $\widetilde{A \times A}$. L'ensemble H(A) des germes d'holonomie de (A, a, S) [II, 1, df.3] (qui sont ici des germes de difféomorphismes locaux de A d'après la proposition 1) en est un ouvert, d'où α et β : H(A) $\longrightarrow$ A qui sont des étalements surjectifs. Vérifions que

(1)

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\beta} & A \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ A & \xrightarrow{a} & S \end{array}$$

est une QF-fourche.

- $(QF)_0$ est évident.

- $(QF)_1$ résulte de la condition (A_2) de la définition 1 (ou bien $(A_2)'$ de la proposition 1).

- $(QF)_2$ est aussi évident car α et β sont des étalements.

- Vérifions $(QF)_3$: dans les hypothèses et avec les notations de $(QF)_3$, les feuilletages images réciproques de A' par f et g coïncident (voir remarque 16 de [I, 4]). Notons le C'. Pour tout $z \in C$, les restrictions de f et g à une sous-variété W transverse à C', suffisamment petite sont des difféomorphismes f_W et g_W sur des ouverts de A (car A' est discret) ; le germe en f(z) du difféomorphisme $g_W f_W^{-1}$ est un élément σ_z de H(A), de but g(z). Définissons une application $k : C \longrightarrow H(A)$ en posant $k(z) = \sigma_z$. On vérifie bien que :

$$\alpha k = f$$

$$\beta k = g$$

α et β étant des étalements, k est différentiable, d'où l'existence de la factorisation, dont nous allons montrer l'unicité.

D'après la construction , k est une submersion (car α et β étales) ; donc $(f, g) = (\alpha, \beta)\, k$ est une décomposition de (f,g) en une submersion k et une immersion (α, β) à travers la variété $\widetilde{A \times A}$ des germes de sous-variété de A x A ; donc (f,g) est une subimmersion et une telle décomposition est nécessairement unique [Bo_2] ; d'où l'unicité de la factorisation et $(QF)_3$.

- Vérifions $(QF)_4$: avec les hypothèses et notations de $(QF)_4$, et d'après la remarque 7 de [II, 3], il suffit de montrer que f et g sont localement constantes. Or si $s \in S$ est la valeur de l'application constante af = ag, f et g induisent des applications différentiables f_1 et g_1 de C dans $a^{-1}(s)$ ($a^{-1}(s)$ est une sous-variété immergée de A) ; $a^{-1}(s)$ étant une variété discrète (car (A, a, S) est un QF-atlas étale), f_1 et g_1 sont localement constantes, donc aussi f et g car $f = j\, f_1$ et $g = j\, g_1$, où j est l'immersion canonique de $a^{-1}(s)$ dans A, d'où $(QF)_4$.

2°) étape : (A, a, S) = X est un QF-atlas quelconque.

(i) La construction précédente s'applique en particulier à un QF-atlas étale $X_t=(A_t, a\,u, S)$ associé comme en [II, 2, remarque 3] à X, d'où une QF-fourche :

(K_t) (2)

$$\begin{array}{ccc} H_t(A_t) & \xrightarrow{\beta_t} & A_t \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_t} & & \downarrow{\scriptstyle a_t} \\ A_t & \xrightarrow{a_t} & S \end{array}$$

où $a_t = a\,u$.

(ii) On a une surmersion $u_s : A_s \longrightarrow A_t$;

la proposition 11, on a le QF-carré suivant

(3) $(u_1^* K_t)$

$$\begin{array}{ccc} A_s \underset{A_t}{\times} H(A_t) & \xrightarrow{\beta_t Pr_2} & A_t \\ \downarrow Pr_1 & & \downarrow a_t \\ A_s & \xrightarrow{a_s} & S \end{array}$$

auquel nous appliquons encore la proposition 11 avec la surmersion $u_1 : A_s \longrightarrow A_t$ pour obtenir le QF-fourche suivante, dans laquelle $H(A_s) = A_s \underset{A_t}{\times} (A_s \underset{A_t}{\times} H(A_t)) \equiv (A_s \times A_s) \underset{A_t \times f_t}{\times} H(A_t)$

(4) (K_s)

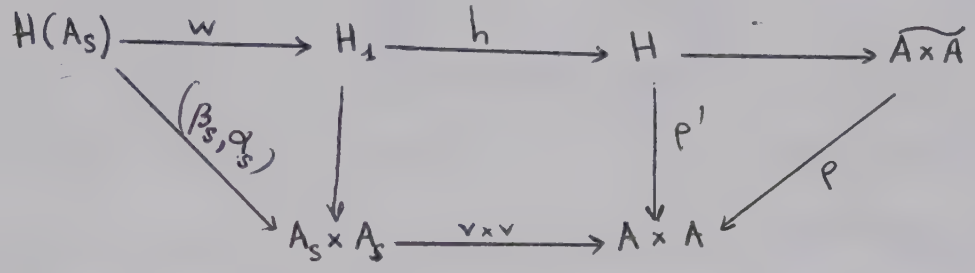
$$\begin{array}{ccc} H(A_s) & \xrightarrow{\beta_s} & A_s \\ \downarrow \alpha_s & & \downarrow a_s \\ A_s & \xrightarrow{a_s} & S \end{array}$$

(en posant $\alpha_s = Pr_1(Pr_2)$, $\beta_s = Pr_1$ les projections ques de $A_s \times (A_s \underset{A_t}{\times} H(A_t))$ dans A_s).

(iii) Construction de H(A) : Considération torisation canonique [I, 3, df 9] ρ's de l'im (v x v) (β_s, α_s) : $H(A_s) \longrightarrow A \times A$, et nosons

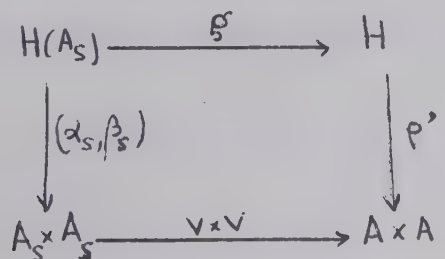
H s'identifie à un ouvert de la variété $\widetilde{A \times A}$ des germes de sous-variétés de A x A ; on a alors le diagramme commutatif suivant :

(5)



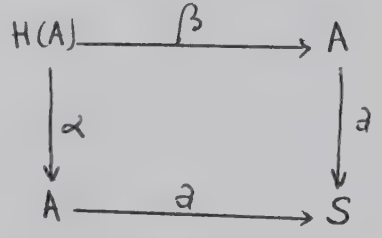
où $H_1 = (A_s \times A_s) \underset{A \times A}{\times} H$ et h W = g ; h et g étant des étalements, il en est de même de W. Les projections canoniques de H dans A étant des submersions, il en est de même des projections canoniques α_1 et β_1 de H_1 dans A_s. On peut alors appliquer $(QF)_3$ à (K_s) et au couple de submersions $\alpha_1, \beta_1 : H_1 \longrightarrow A_s$, d'où une unique application différentiable $W_1 : H_1 \longrightarrow H(A_s)$ telle que $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_s, \beta_s)\ W_1 W$; donc d'après $(QF)_3$, $W_1 W = id$. Comme W est un étalement, W et W_1 sont des difféomorphismes. $H(A_s)$ est donc difféomorphe à H_1 auquel nous l'identifierons. Nous avons alors le diagramme cartésien :

(6)



posons $H(A) = H$, $\alpha = Pr_1 \rho'$, $\beta = Pr_2 \rho'$ et montrons que le carré

(7)



est une QF-fourche :

- $(QF)_0$ résulte des définitions de α et β et du diagramme (6), car $\alpha g = v \alpha_s$ et $\beta g = v \beta_s$ avec g et v étales surjectifs.

- $(QF)_1$: v est étale surjectif, donc v x v aussi. Si $(y_1, y_2) \in A \underset{S}{x} A$, il existe $(x_1, x_2) \in A_s \times A_s$ tel que $(v \times v)(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. D'après la construction de A_s, (x_1, x_2) appartient nécessairement à $A_s \underset{S}{x} A_s$; donc en appliquant $(QF)_1$ à (K_s) (voir diagramme 4), il existe $z \in H(A_s)$ tel que $(\beta_s, \alpha_s)(z) = (x_1, x_2)$; $g(z)$ appartient à $H(A)$ et par commutativité du diagramme (6), on a bien $(\beta, \alpha)(g(z)) = (y_1, y_2)$; d'où $(QF)_1$.

- $(QF)_2$ résulte de l'égalité

$$(v \times v)(\beta_s, \alpha_s) = (\beta, \alpha) g$$

car g et v x v sont étales surjectifs, et (β_s, α_s) est une immersion.

- Vérifions $(QF)_3$: soient pour cela deux submersions $f, g : C \longrightarrow A$ telles que $\alpha f = \alpha g$. Soit $x \in C$; la famille $\mathcal{U}$ d'ouverts distingués qui a servi à construire A_s recouvre A ; f et g étant différentiables, pour tout V_x, $W_x \in \mathcal{U}$ tels que $f(x) \in V_x$ et $g(x) \in W_x$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans C tel que $f(U_x) \subset V_x$ et $g(U_x) \subset W_x$. V_x et W_x s'identifent à des ouverts de A_s et $v|_{V_x}$ et $v|_{W_x}$ sont des difféomorphismes sur V_x et W_x respectivement. Les submersions $(v|_{V_x})^{-1}\,(f|_{U_x})$ et $(v|_{W_x})^{-1}\,(g|_{U_x})$ de U_x dans A_s vérifient les hypothèses de $(QF)_3$ pour (K_s) (voir diagramme 4) : il existe donc une unique application différentiable $k'_{U_x} : U_x \longrightarrow H(A_s)$ telle que $\alpha_s k'_{U_x} = f|_{U_x}$, $\beta_s k'_{U_x} = g|_{U_x}$. Posons $k_{U_x} = g\, k'_{U_x} : U_x \longrightarrow H(A)$ et montrons que les applications $(k_{U_x})_{x \in C}$ définissent une unique application différentiable k de C dans $H(A)$. Or si $y \in U_x \cap U_{x'}$, en appliquant la construction précédente aux restrictions de f et g à $U_x \cap U_{x'}$, on en déduit que $k(y)_{U_x} = k(y)_{U_{x'}} = k(y)_{U_x \cap U_{x'}}$; ce qui achève la démonstration de $(QF)_3$, car toute autre factorisation coïncide localement avec un k_{U_x}.

Pour vérifier $(QF)_4$, si $x \in C$, on peut choisir U_x, V_x, W_x comme ci-dessus. En appliquant $(QF)_4$ à (K_s) et au

couple d'applications $(v|_{V_x})^{-1}(f|_{U_x})$ et $(v|_{V_x})^{-1}(g|_{U_x})$, on déduit comme précédemment, une application différentiable $k_1 : U_x \longrightarrow H(A)$, d'où $(QF)_4$.

2°) $\Longrightarrow$ 3°) : D'après la proposition 10, $H(A) = H$ possède une structure de groupoïde différentiable subintransitif, de base A, de quotient d'intransitivité S. Montrons que H est transhomogène. Soit alors $f : C \longrightarrow A$ un morphisme de variétés tel que af soit une application constante. Soit $x \in f(C)$ et notons $\bar{x}$ la classe d'intransitivité de x, munie de sa structure de variété décrite dans [I,4, prop. 8] ; f et l'application constante $\mu : C \longrightarrow A$ égale à x vérifient les hypothèses de $(QF)_4$: pour tout $z \in C$, il existe donc un voisinage ouvert Ω de z, une application différentiable

$$k_1 : \Omega \longrightarrow H \text{ tels que } \alpha k_1 = \mu \quad \text{et} \quad \beta k_1 = f ; \quad k_1$$

est alors à valeurs dans $\alpha^{-1}(x)$ (qui est une sous-variété immergée de A), donc induit une application différentiable, encore notée k_1, de Ω dans $\alpha^{-1}(x)$. Mais $\beta|_{\alpha^{-1}(x)}$: $\alpha^{-1}(x) \longrightarrow \bar{x}$ étant différentiable par construction de $\bar{x}$, il en est de même de f considérée comme application de but $\bar{x}$.

3°) $\Longrightarrow$ 1°) : De l'égalité $\pi_{H(A)}(H(A)) = A \underset{S}{\times} A$, on déduit que la relation d'équivalence définie sur A par (A, a, S) coïncide avec la relation d'intransitivité

[I, 4, df.11], donc définissent le même quotient S. Montrons que X = (A, a, S) est un QF-atlas de S. La condition (A_1) de [II, 1, df.1] s'obtient à partir du théorème1 de [I, 3] d'où en particulier un feuilletage A' sur A. D'autre part si $\bar{x}$ est une classe d'intransitivité, de l'égalité $a\alpha_{H(A)} = a\beta_{H(A)}$, on déduit que $\alpha^{-1}_{H(A)}(\bar{x}) = \beta^{-1}_{H(A)}(\bar{x})$ comme variétés immergées, et par suite leurs composantes connexes coïncident ; donc les images réciproques du feuilletage A' par $\alpha_{H(A)}$ et $\beta_{H(A)}$ coïncident. (A_2) s'obtient alors comme en 1°) $\Longrightarrow$ 2°) en considérant les feuilletages A', $\alpha^{*}_{H(A)} A' = \beta^{*}_{H(A)} A'$.

Remarque 10

Soit (A, a, S) un QF-atlas. A partir des notations et constructions de 1°) $\Longrightarrow$ 2°) du théorème 1, nous déduisons le diagramme commutatif suivant dans la catégorie $\mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccccc} L & \longrightarrow & H(A_s) & \longrightarrow & H(A_t) \\ \downarrow & (1) & \downarrow & (2) & \downarrow \\ A_t \times A_t & \longrightarrow & A_s \times A_s & \xrightarrow{u_2 \times u_2} & A_t \times A_t \end{array}$$

où $L = (A_t \times A_t) \times_{A_s \times A_s} H(A)$. Les carrés (1) et (2) sont cartésiens par construction. Or $u_2 u_1 = id$, donc L est difféomorphe à $H(A_t)$ auquel nous l'identifierons. Par suite nous

avons (voir diagramme 2) $K_t = u_1^{*} K_s$.

Remarque 11

D'après la construction de H(A), si (A, a, S) est un QF-atlas étale, H(A) est un groupoïde différentiable étale [I, 4, c].

Définition 14

Pour tout QF-atlas (A, a, S), le groupoïde différentiable H(A) donné par le théorème 1 sera appelé le groupoïde d'holonomie transversal (A, a, S).

D'après le théorème 1 et la remarque 8, H(A) est unique à un difféomorphisme près. De façon plus précise nous avons le résultat suivant qui suffit à caractériser H(A) à un isomorphisme de groupoïde différentiable près

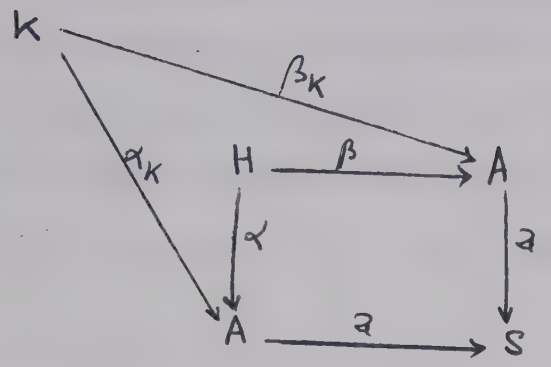
Proposition 12

Soit (A, a, S) un QF-atlas de S de groupoïde d'holonomie H(A). Pour tout groupoïde différentiable K de base A tel que $a\alpha_K = a\beta_K$, il existe un unique foncteur de groupoïdes différentiables $\varphi : K \longrightarrow H(A)$.

Démonstration

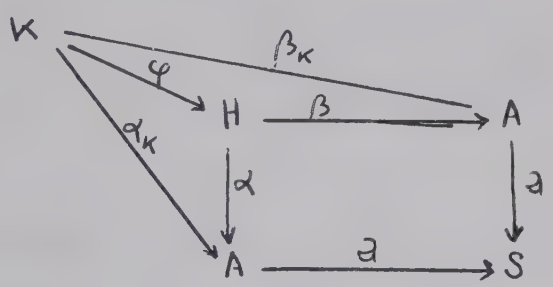
D'après les hypothèses, on a le diagramme ensemblistement commutatif :

(1)



où on a posé $H = H(A)$, $\alpha = \alpha_{H(A)}$, $\beta = \beta_{H(A)}$. D'après $(QF)_3$, il existe une unique application différentiable $\varphi : K \longrightarrow H$ laissant commutatif le diagramme suivant :

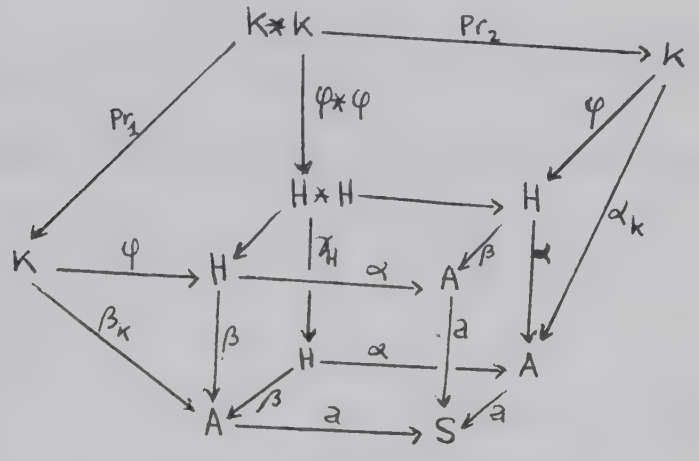
(2)



montrons que φ est un foncteur. D'après le diagramme (2), il reste seulement à montrer que l'image du composé de deux éléments composables est le composé des images. Notons $K * K = K \underset{\alpha_K = \beta_K}{\times} K$ (resp. $H * H = H \underset{\alpha_H = \beta_H}{\times} H$) la variété des couples

composables de K (resp. H), γ (resp. γ_H) la loi de composition partielle sur K (resp. sur H) ; $\varphi \times \varphi : K \times K \longrightarrow H \times H$

induit une application différentiable $\varphi * \varphi : K*K \longrightarrow H \times H$ qui est à valeurs dans $H * H$ (qui est une sous-variété plongée de $H \times H$) ; donc $\varphi * \varphi$ induit une application différentiable, encore notée $\varphi * \varphi$ de $K * K$ dans $H * H$. Compte tenu de ce qui précède et de la définition de la loi de composition γ_H [II, 3, prop. 10], on a le diagramme commutatif suivant :



On peut vérifier que ce diagramme reste également commutatif si on y remplace $\gamma_H (\varphi * \varphi)$ par $\varphi \gamma_K$. Alors le couple de submersion $\alpha_K Pr_1 : K * K \longrightarrow A$ et $\beta_K Pr_2 : K * K \longrightarrow A$ admet $\gamma_H (\varphi * \varphi)$ et $\varphi \gamma_K$ comme factorisation à travers H. D'après l'unicité dans la condition $(QF)_3$, on a nécessairement $\gamma_H (\varphi * \varphi) = \varphi \gamma_K$. Donc φ est un foncteur.

Remarque 12

L'unicité de H (A) implique en particulier qu'il ne dépend pas du recouvrement d'ouverts distingués dont on est parti pour obtenir A_s et A_t. On pourra de ce fait prendre par exemple pour A_s la somme de tous les ouverts distingués.

Corollaire

Soient S_1 et S_2 deux QF-variétés, (A_1, a_1, S_1) et (A_2, a_2, S_2) des QF-atlas respectifs de S_1 et S_2. Alors $(A_1 \times A_2, a_1 \times a_2, S_1 \times S_2)$ est un QF-atlas de $S_1 \times S_2$ et $H(A_1 \times A_2)$ s'identifie à $H(A_1) \times H(A_2)$.

Démonstration

On sait déjà [II, 2, prop. 9'], que $(A_1 \times A_2, a_1 \times a_2, S_1 \times S_2)$ est un QF-atlas de $S_1 \times S_2$. D'après la proposition précédente, on a un unique foncteur φ de $H(A_1) \times H(A_2)$ vers $H(A_1 \times A_2)$. En appliquant successivement $(QF)_3$ au couple de submersions

$H(A_1 \times A_2) \longrightarrow A_1 \times A_2 \longrightarrow A_i$, $i = 1, 2$, on déduit une unique application différentiable $\Psi : H(A_1 \times A_2) \longrightarrow H(A_1) \times H(A_2)$ qui commute avec les projections source et but. Par unicité, on a nécessairement $\varphi\Psi = id$ et $\Psi\varphi = id$; φ et Ψ sont alors des difféomorphismes.

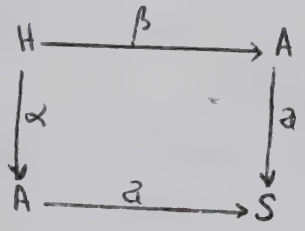
Définition 14'

On dira qu'un groupoïde subintransitif G [I, 3, df. 12] est strictement subintransitif (respt. Π-régulier) si l'immersion de la factorisation canonique [I,2,df 9] de la subimmersion Π_G est stricte (respt. est un plongement).

Le théorème 1 permet d'étendre la condition $(QF)_3$ de la définition 1 de [II, 1] comme il suit pour les QF-fourches :

Proposition 13

Soit



une QF-fourche (donc (A, a, S) est un QF-atlas de S d'après le théorème 1), alors la condition $(QF)_3$ s'étend de la façon suivante :

$(QF)'_3$: soient f et g des morphismes de variétés de C dans A transversaux à (A, a, S) et tels que af = ag. Alors il existe un unique morphisme de variétés k : C $\longrightarrow$ H tel que $\alpha k = f$ et $\beta k = g$.

Démonstration

La démonstration suit celle de $(QF)_3$ dans (iii) de 1°) $\Longrightarrow$ 2°) du théorème 1 ; on reprend les nota-

tions de la démonstration du théorème 1. Les ouverts V_x, U_x et W_x étant construits, les applications $f_x = (v|_{V_x})^{-1}(f|_{U_x}) : U_x \longrightarrow A_s$ et $g_x = (v|_{W_x})^{-1}(g|_{U_x}) : U_x \longrightarrow A_s$ sont transversales à $(A_s, a\,v, S)$. On en déduit que $u_2 f_x : U_x \longrightarrow A_t$ et $u_2 g_x : U_x \longrightarrow A_t$ sont des submersions. De plus on a : $a\,u\,u_2\,f_x = a\,v\,f_x = a(f|_{U_x}) = a(g|_{U_x}) = a\,u\,u_2 g_x$. On peut donc appliquer $(QF)_3$ à (K_t) et au couple de submersions $u_2\,f_x$ et $u_2 g_x$, d'où l'existence d'une unique application différentiable $h'_x : U_x \longrightarrow H(A_t)$ telle que $\alpha_t\, h'_x = u_2 f_x$, $\beta_t h'_x = u_2 g_x$. On déduit, d'après la construction de $H(A_s)$, une unique application différentiable $h_x : U_x \longrightarrow H(A_s)$ telle que $\alpha_s\, h_x = f_x$ et $\beta_s h_x = g_x$; d'après la construction de H (A) (qui s'identifie à H), on déduit une unique application $k'_x : U_x \longrightarrow H$ (plus simplement $k'_x = g\, h_x$ d'après le diagramme 6 de la démonstration du théorème 1), telle que $\alpha\, k'_x = \alpha\, g\, h_x = v \alpha_s\, h_x = v\, f_x = f|_{U_x}$ de même $\beta\, k'_x = g|_{U_x}$.

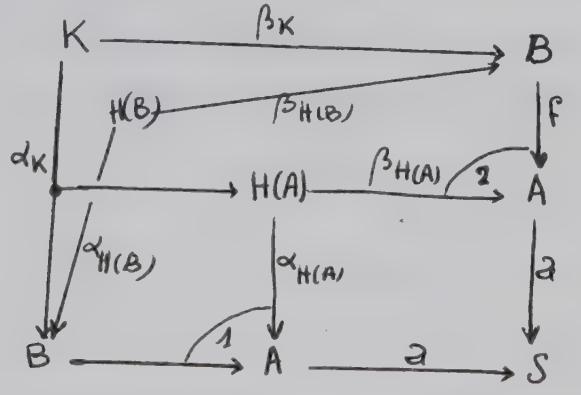
On vérifie comme en 1°) $\Longrightarrow$ 2°) du théorème 1 que les k'_x, $x \in C$, définissent une unique application différentiable k de C dans H telle que $\alpha\, k = f$ et $\beta\, k = g$; l'unicité de la factorisation se voit par un raisonnement analogue.

Corollaire

Soient (A, a, S) un QF-atlas de S, f : B ⟶ A un morphisme de variété transversal à (A, a, S); (on sait [II, 1, prop 4] que (B, af, S) est un QF-atlas de S). Alors H(B) est difféomorphe au groupoïde différentiable $f^{*}(H(A))$, image réciproque de H(A) par f x f : B x B ⟶ A x A.

Démonstration

Par construction de $f^{*}H(A) = K$, on a le diagramme commutatif ensemblistement suivant :



où les carrés 1 et 2 sont cartésiens. D'après la proposition 13 il existe une application différentiable

φ' : H (B) ⟶ H(A) tel que le diagramme commute encore. En utilisant d'abord le fait que le carré 1 est cartésien, puis que le carré 2 l'est aussi, on en déduit une unique application différentiable φ : H (B) ⟶ K .

D'autre part, la proposition 12 implique qu'il existe un unique foncteur Ψ: K $\longrightarrow$ H (B). Par unicité on a nécessairement $\varphi\Psi$ = id et $\Psi\varphi$ = id ; donc φ est un difféomorphisme.

Remarque 13

On déduit du corollaire ci-dessus que si un QF-atlas (B, b, S) est image réciproque d'un QF-atlas (A, a, S) par un morphisme de variété f : B $\longrightarrow$ A transversal à (A, a, S), alors pour tout x$\in$ B, le groupe d'isotropie de H (B) en x est isomorphe à celui de H (A) en f (x).

Comme cas particulier du théorème 1, nous avons le résultat suivant dû essentiellement à Barre [BA] , et Godement [S] ,

Théorème 2 (BARRE - GODEMENT)

Avec les notations et hypothèses du théorème 1, les conditions suivantes sont équivalentes :

1°) S possède une structure de Q-variété (respt. de variété) telle que a soit Q-surmersive (respt. surmersive),

2°) Il existe une Q-fourche (respt. fourche) (H, A, S ; α , β , a),

3°) Il existe un groupoïde différentiable strictement subintransitif [II, df 14'] (respt. -régulier) tel que $\pi_G(G) = A \underset{S}{\times} A$.

Démonstration

L'équivalence 1°) $\Longleftrightarrow$ 2°) vient de [BA] . Montrons que 2°) $\Longrightarrow$ 3°) : le théorème 1 implique

que G = H (A) est un groupoïde différentiable subintransitif, strictement (car (β , α) : H $\longrightarrow$ A x A est une immersion stricte), de quotient d'intransitivité S ; donc $\pi_H^{(H)} = A \underset{S}{x} A$.

Montrons que 3°) $\Longrightarrow$ 1°) : si π_G est une subimmersion stricte de décomposition canonique $\rho' g$ [I,2, df 9] , R = $A \underset{S}{x} A$ est une sous-variété immergée (donc une sous-Q-variété Q-immergée) de A x A difféomorphe à g (G) [I, 2, prop 6]. De plus Pr_i : R $\longrightarrow$ A i = 1, 2 est une surmersion, donc Q-surmersive. D'après [BA] (théorème de la page 246), S possède une structure de Q-variété telle que a : A $\longrightarrow$ S soit Q-surmersive.

Dans le cas des variétés, les démonstrations restent très voisines utilisant entre autre le théorème de Godement sur les relations d'équivalences régulières ([I, 4, b] ou [S]).

c) Caractérisation de QF-atlas équivalents

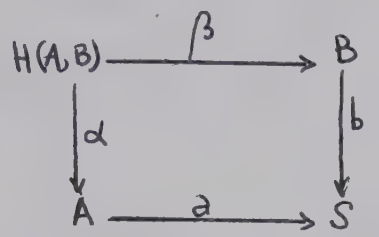
Nous allons maintenant donner une caractérisation de QF-atlas équivalents dans le théorème suivant qui constitue le deuxième résultat important de ce chapitre.

Théorème 3

Soient X = (A, a, S) et Y = (B, b, S) des variétés découpées. Les propriétés suivantes sont équivalentes

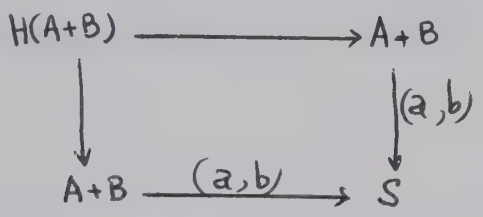
1°) X et Y sont des QF-atlas QF-équivalents de S,

2°) il existe un QF-carré

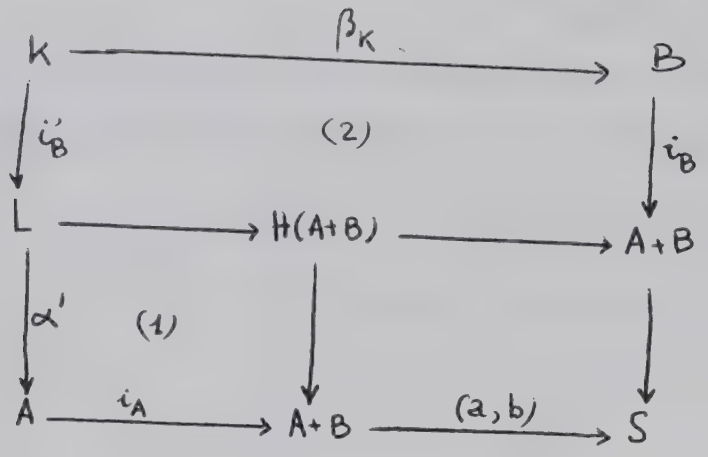


Démonstration

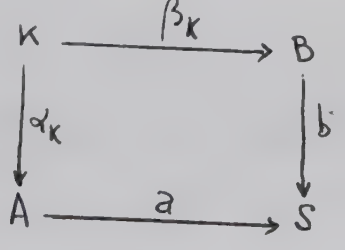
1°) $\Longrightarrow$ 2°) : **si X et Y sont des QF-**atlas équivalents, $X +_S Y = (A + B, (a,b), S)$ est un QF-atlas [II, 2, df 7] . D'après le théorème 1, il existe une QF-fourche



Notons i_A (resp. i_B) le difféomorphisme canonique de A (resp. de B) dans A + B. Nous avons le diagramme ensemblistement commutatif suivant :



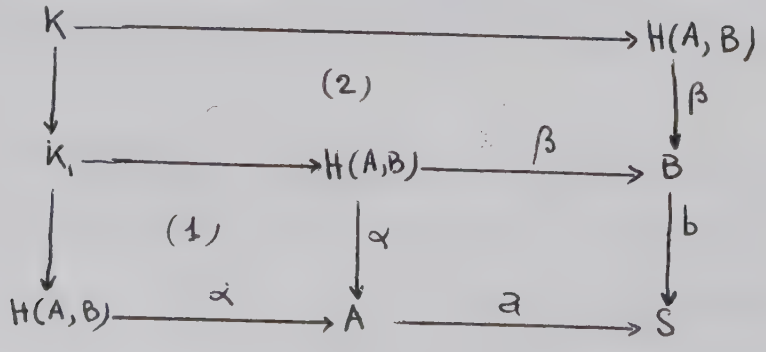
où les carrés (1) et (2) sont cartésiens par construction.
D'après la proposition 11, on a le QF-carré :



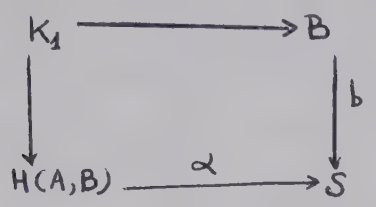
où $\alpha_K = \alpha' i'_B$

Il suffit alors de poser H (A, B) = K.

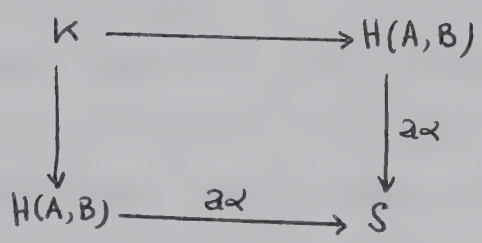
2°) $\Longrightarrow$ 1°) : on a le diagramme ensemblistement commutatif suivant :



où les carrés (1) et (2) sont cartésiens par construction. De la proposition 11, on déduit d'abord le QF-carré :



ensuite la QF-fourche :



D'après le théorème 1, $(H(A, B), a\alpha = b\beta, S)$ est alors un QF-atlas de S, donc aussi [II, 1, prop 3], (A, a, S) et (B, b, S), qui sont tous les deux QF-équivalents à $(H(A, B), a\alpha = b\beta, S)$ [II, 2, prop 4], donc QF-équivalents.

Remarque pratique 14

H (A, B) est difféomorphe à un ouvert de H (+ B). Plus précisément c'est l'ensemblement des éléments de H(A + B) de source dans A et de but dans B.

Nous allons tirer un certain nombre de conséquences du théorème 3 :

Corollaire 1

Deux QF-atlas (A, a, S) et (B, b, S) de S sont QF-équivalents si et seulement s'il existe des surmersions f : C ⟶ A et g : C ⟶ B telles que af = bg. En particulier si (A, a, S) et (B, b, S) sont étales, on peut prendre pour f et g des étalements surjectifs.

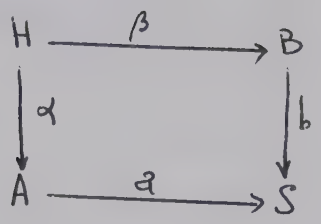
Démonstration

Si (A, a, S) et (B, b, S) sont des QF-atlas équivalents, il suffit de prendre C = H (A, B), f = α , g = β [théorème 3] ; d'après la construction de H (A, B), α et β sont des étalements si (A, a, S) et (B, b, S) sont des QF-atlas étales. Inversement si de telles surmersions existent, alors [II, 1, prop. 3] , (C, af, S) = (C, bg, S) est un QF-atlas équivalent à (A, a, S) et à (B, b, S) [prop. 5].

Le résultat suivant étend la condition $(QF)_3$ de la définition 10 de [II, 3]

Corollaire 2

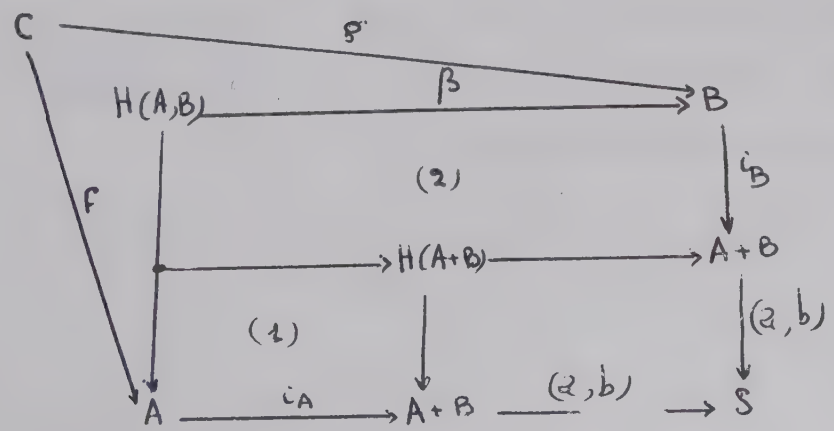
Soit



un QF-carré, (donc (A, a, S) et (B, b, S) sont des QF-atlas d'après le théorème 2). Alors pour tout couple de morphismes de variétés $f : C \longrightarrow A$ et $g : C \longrightarrow B$ transversaux respectivement à (A, a, S) et (B, b, S) et tels que $af = bg$, il existe un unique morphisme de variétés $k : C \longrightarrow H$ tel que $\alpha k = f$ et $\beta k = g$.

Démonstration

La démonstration s'inspire de la construction de H (A, B) qui s'identifie à H. Nous avons alors le diagramme commutatif suivant :



où les carrés (1) et (2) sont cartésiens par construction dans la catégorie $\mathcal{D}$; i_A et i_B étant des submersions, i_A f et i_B g : C ⟶ A + B sont transversaux au QF-atlas (A + B, (a, b), S). D'après la proposition 13 ,il existe une unique application différentiable k_1 : C ⟶ H (A + B) laissant le diagramme commutatif. En utilisant d'abord le fait que le carré (1) est cartésien, puis que le cas (2) l'est aussi, on en déduit une unique application différentiable k : C ⟶ H (A, B) qui satisfait aux conditions voulues.

Corollaire 3

Soient (A, a, S) et B, b, S) deux QF-atlas QF-équivalents. Alors H(A, B) est difféomorphe à H (B, A).

Démonstration

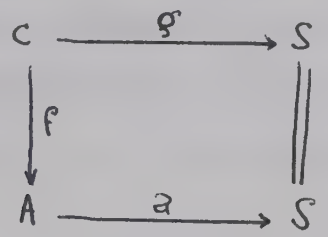
En appliquant $(QF)_3$ au couple de submersions H(B, A) ⟶ B et H (B, A) ⟶ A on déduit une unique application différentiable φ: H (B, A) ⟶ H (A, B). De même on a une unique application différentiable ψ : H (A, B) ⟶ H (B, A) (φ et ψ commutant avec les différentes projections). Par unicité $\varphi\psi = \psi\varphi = id$; donc φ est un difféomorphisme.

Corollaire 4

Soit S une variété. (A, a, S) est un QF-atlas de S si et seulement si a est une surmersion ; c'est un QF-atlas étale si et seulement si a est un étalement surjectif.

Démonstration

Supposons que (A, a, S) soit un QF-atlas de S ; il est donc équivalent au QF-atlas (S, id_S, S) ; donc [corol. 1], il existe des surmersions $f : C \longrightarrow A$, $g : C \longrightarrow S$ telles que le diagramme suivant commute :



par suite a est une surmersion ; la réciproque et le reste de la démonstration découlent également du corollaire 1.

Remarque 15

Si (A, a, S) et (B, b, S) sont étales et équivalents, et si $(x, y) \in A \underset{S}{\times} B$, alors $\dim_x A = \dim_y B$.

Nous sommes maintenant en mesure de répondre partiellement, comme annoncé, à la première des deux questions posées au 4° de [II, 2, c] .

Posons d'abord la définition suivante :

Définition

On dit qu'un groupoïde différentiable G de base B est α-connexe si pour tout $x \in B$, $\alpha_G^{-1}(x)$ est connexe.

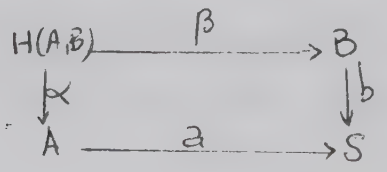
Un feuillage différentiel est localement le quotient d'un feuilletage. Il suffit donc de prouver la

Proposition 13'

Soient S une QF-variété, (A, a, S) et (B, b, S) deux feuilletages [II, 1, df 5] F-équivalents. Si H(A) est α-connexes, alors (A, a, S) et (B, b, S) sont F-équivalents.

Démonstration

Nous avons le QF-carré



D'après la définition de F-équivalence [I,4, df20] on sait que les feuilletages images réciproques par α et β coïncident ; il suffit donc de montrer que $\forall\ s \in S$, $(a\alpha)^{-1}(s) = (b\beta^{-1}(s)$ est connexe. H(A) et H(A,B) s'identifient à des ouverts de H(A + B). Or en se plaçant dans le groupoïde H(A + B), les fibres de β sont difféomorphes aux α-fibres de H(A), donc sont connexes. Par suite d'après [BO_1] , $\beta^{-1}(b^{-1}(s))$ est connexe car $b^{-1}(s)$ l'est.

Considérons maintenant deux QF-atlas (A, a, S) et (B, b, S) d'une QF-variété S. D'après le corollaire 1, il existe des surmersions $f : C \longrightarrow A$, et $g : C \longrightarrow B$ telles que af = bg. On sait que (C, af = bg, S) est un QF-atlas de S équivalent à (A, a, S) et à (B, b, S) et que [corollaire de la prop. 13] $H(C) = f^{*}H(A) = g^{*}H(B)$. autrement dit

$$H(C) = (C \times C) \underset{A \times A}{\times} H(A) = (C \times C) \underset{B \times B}{\times} H(B).$$

On peut toujours supposer que l'application $(f, g) : C \longrightarrow A \times B$ est surjective sur $A \underset{S}{\times} B$ (par exemple en prenant $C = H(A, B)$).

Alors si $(x, y) \in A \underset{S}{\times} B$, il existe $z \in C$ tel que $f(z) = x$ et $g(z) = y$; d'après la remarque 13 , les groupes d'isotropie de H (A) et H (B) en $f(z) = x$ et $g(z) = y$ respectivement sont isomorphes à celui de H (C) en z , donc isomorphes . En particulier si x et $x' \in A$ sont tels que $a(x) = a(x')$, les groupes d'isotropie de H (A) en x et x' sont isomorphes. En conséquence à tout point s de S est attaché un groupe G_s défini à isomorphisme près ; nous poserons :

Définition 15

Pour $s \in S$, le groupe G_s (défini à isomorphisme près comme ci-dessus) est appelé groupe d'holonomie transversal de S en s.

Bien entendu lorsque S est le quotient d'un feuilletage A' de A, et si $x \in A$, $s = a(x)$ (où a est la projection

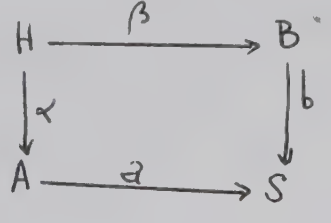
canonique de A sur $A/A' = S$), le groupe d'holonomie transversal (voir $[G_1]$) de A' en x est isomorphe à G_s. Les feuilletages QF-équivalents [1, 5, df. 19] ont donc des groupes d'holonomie transversaux isomorphes (dans un sens évident), lorsque les variétés sont paracompactes.

Théorème 4

Avec les notations et hypothèses du théorème 3, les propriétés suivantes sont équivalentes

1°) S possède une structure de Q-variété (respt. de variété) telle que a et b soient Q-surmersives (respt. surmersives),

2°) Il existe un Q-carré (respt. un carré de Godement)



Démonstration

1°) $\Longrightarrow$ 2°) : Notons (a, b) la projection de la variété somme disjointe A + B sur S, i_A (respt i_B) le difféomorphisme canonique de A (respt. B) sur un ouvert de A + B; $a = (a, b)i_A$ et $b = (a, b)\, i_B$ étant Q- surmersives, il en est de même de (a, b) : A + B $\longrightarrow$ S. D'après

l'implication 1°) $\Longrightarrow$ 2°) du théorème 2, il existe une Q-fourche

(K)

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\beta_L} & A+B \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_L} & & \downarrow{\scriptstyle (a,b)} \\ A+B & \xrightarrow{(a,b)} & S \end{array}$$

d'après la proposition 11, on a la Q-fourche

$(i_A^* K)$

$$\begin{array}{ccc} A \times_{A+B} L & \longrightarrow & A+B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{i_A} A+B \longrightarrow & S \end{array}$$

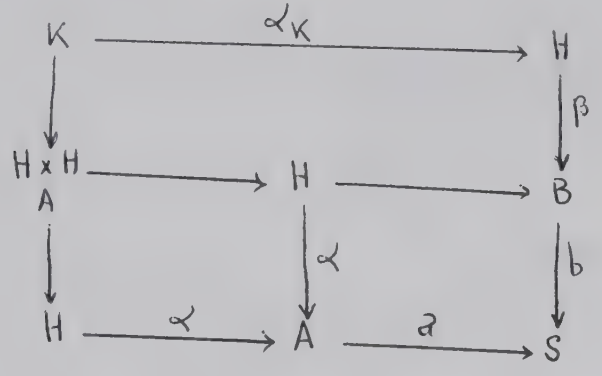
En appliquant de nouveau la proposition 11 à $(i_A^* K)$ et à i_B : $B \longrightarrow A + B$, on en déduit la Q-fourche suivante, où

$$H = \left(A \times_{A+B} L\right) \times_{A+B} B$$

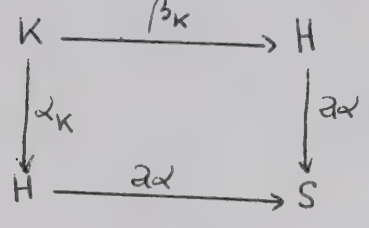
(K)

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow A+B \longrightarrow & S \end{array}$$

2°) $\Longrightarrow$ 1°) : on a le diagramme commutatif suivant :



où $K = (H \underset{A}{\times} H) \underset{B}{\times} H$; d'où [prop. 11] la Q-fourche



par suite [théorème 2], S possède une structure de Q-variété telle que $a\alpha = b\beta$ soit Q-surmersive, donc aussi a et b car α et β le sont ([BA], page 239) .

d) QF-variété tangente

Considérons une QF-variété S, et un QF-atlas étale (A, a, S) de S. Nous définissons sur l'espace tangent TA de A une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par : $u \in T_x A$ et $v \in T_y A$ sont équivalents si et seulement s'il existe un germe d'isomorphisme transversal de (A, a, S) de source x et but y tel que $(T\sigma)\, u = v$; il en résulte que $a(x) = a(y)$. Il est facile de voir que u et v sont équivalents si et seulement s'il existe $W \in T(H(A))$ tel que $(T\alpha)W = u$ et $(T\beta)\, W = v$ car σ est de la forme $\mu\beta$, où μ est une section locale de α.

Désignons par $TA/\mathcal{R}$ le quotient de TA par $\mathcal{R}$, T la projection canonique de TA sur $TA/\mathcal{R}$. Le candidat à la définition de la QF-variété tangente est très clairement $TA/\mathcal{R}$, et l'atlas serait $(TA, Ta, TA/\mathcal{R})$. Malheureusement la condition $(A_1)'$ de la proposition 1 de [II, 1] n'est pas toujours vérifiée comme on peut le voir sur un exemple où la classe de $u \in T_x A$ dans $T_x A$ est une courbe. Néanmoins on peut, pour une classe assez large de QF-variétés, définir la QF-variété tangente comme l'indique par exemple la proposition suivante :

Proposition 14

Si les groupes d'holonomie de S sont au plus dénombrables, alors $TA/\mathcal{R}$ possède une structure de QF-variété d'atlas étale $(T_1, T_2, TA/\mathcal{R})$.

Démonstration

La condition $(A_2)'$ est évidente. Quant à $(A_1)'$, soit $f : B \longrightarrow TA$ telle que (Ta) f soit une application constante. Soient $z \in B$, $f(z) = u \in T_xA$. Alors $t_A f$ est à valeurs dans la classe de $\bar{x}$, donc est localement constante. Par suite $t_A f$ est constante sur un voisinage Ω de z ; f est donc à valeurs dans la trajectoire de u (dans T_xA) sous l'action du groupe d'isotropie H_x de H(A) en x. Les groupes d'holonomie de S étant au plus dénombrables, il en est de même de H_x ; la trajectoire de u_x dans T_xA est donc localement finie ; par suite $f|_\Omega$ est localement constante. Donc f est localement constante.

Remarque 16

Soient (A, a, S) et (B, b, S) deux QF-atlas étales de S. Alors $TA/\mathcal{R}$ et $TB/\mathcal{R}$ sont en bijection. TS est donc définie à une bijection près.

Définition 16

Nous appelons QF-variété tangente à S et nous noterons TS, la QF-variété $TA/\mathcal{R}$ quand elle existe, autrement dit lorsque la condition $(A_1)'$ est vérifiée.

Si $s \in S$, et si $a(x) = a(y) = s$, alors $T_x A/\mathcal{R}$ est en bijection avec $T_y A/\mathcal{R}$. Nous poserons :

Définition 17

$T_s S = T_x A/\mathcal{R}$ l'espace tangent de S en s. Il est défini à une bijection près. On peut cependant, en donner une définition canonique en se plaçant dans la classe de "tous" les atlas étales de S et en définissant une relation d'équivalence dans la classe des vecteurs tangents à ces atlas. Les classes d'équivalence (qui peuvent être considérées comme des objets de la théorie des ensembles grâce à l'artifice de Bourbaki (Ens.), c'est-à-dire au moyen du "symbole à tout faire" τ) forment alors un ensemble canoniquement défini, en bijection avec le précédent.

Lorsque les groupes d'holonomie de S sont nuls, $T_s S$ est en bijection avec $T_x A$, et peut être muni d'une structure d'espace vectoriel : c'est ce qui se passe par exemple dans le cas des Q-variétés.

III

CATEGORIE DES QF-VARIETES ET PSEUDO-THEOREME DE GODEMENT

Dans ce chapitre, nous définissons la catégorie $\mathcal{QF}$ des QF-variétés, et en étudions plusieurs sous-catégories. Dans certaines conditions, nous pouvons définir un vrai produit fibré dans $\mathcal{QF}$. La notion de pseudo-produit fibré est introduite et on démontre un théorème d'existence de quotients dans $\mathcal{QF}$.

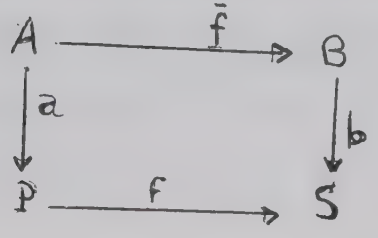
1 - La catégorie des QF-variétés

a) QF-morphismes

Définition 1

Soient P et S deux QF-variétés. Une application f de P dans S est un QF-morphisme, s'il existe des atlas (A, a, P) et (B, b, S) de P et S respectivement, une application différentiable $\bar{f}$ de A dans B tels que le diagramme suivant commute ensemblistement :

(1)



Définition 2

Si f est un QF-morphisme, un diagramme du type (1) est appelé un atlas de f, et $\bar{f}$ un relèvement de f. A et B sont respectivement les atlas source et but de $\bar{f}$ ou de l'atlas de f.

Remarques 1

(i) Si f est un QF-morphisme de P vers S, la donnée d'un atlas de f dont les atlas source et but sont fixés est équivalente à la donnée d'un relèvement $\bar{f}$ de f (de source et but les atlas fixés) ; si donc il n'y a aucun risque de confusion, par abus de langage et de notations, $\bar{f}$ désignera également l'atlas de f qui lui correspond.

(ii) Tout QF-morphisme est une application continue pour la topologie des QF-variétés [II, 1, df9] (qui n'est autre que la topologie quotient), car la relation d'équivalence définie par les QF-atlas est ouverte [II, 2, remarque 5.].

Exemples de QF-morphismes 1

(i) L'application identique est trivialement un QF-morphisme.

(ii) Si (A, a, P) est un atlas de la QF-variété P, alors a est un QF-morphisme (lorqu'on munit la variété A de sa structure canonique de QF-variété [II, 2, c] : en effet (A, id_A, A) est un atlas de A et a admet id_A comme relèvement.

(iii) Tout Q-morphisme de Q-variétés ([BA] ou [I, 5, c]) induit un QF-morphisme (lorsqu'on munit les Q-variétés de leurs structures canoniques de QF-variétés [II, 2, c]). En particulier tout morphisme de variétés différentiables induit un QF-morphisme. Plus précisement :

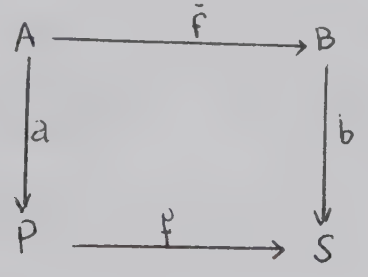
Proposition 1

Soient P et S deux Q-variétés (respt. deux variétés), f : P ⟶ S une application. Alors f est un QF-morphisme (lorsqu'on munit P et S de leurs structures canoniques de Q-variétés) si et seulement si f est un Q-morphisme (respt. est une application différentiable).

Démonstration

- Dans le cas des Q-variétés, la démonstration est claire car tout QF-atlas étale est un Q-atlas [II, 2, lemme 2] .

- Soient P et S deux variétés, f : P ⟶ S un QF-morphisme ; alors f possède un atlas :



D'après [II, 3, c], a (et b) sont des surmersions. Puisque fa = af̄ est différentiable, il en est de même de f.

(iii) Soient A et B des variétés paracompactes, (A, A') et (B, B') des variétés feuilletées, de quotients respectifs les QF-variétés P et S [II, 2, prop 7], de projections canoniques respectives a et b. Alors tout morphisme de variétés feuilletées f̄ : (A, A') ⟶ (B, B') induit de façon évidente un QF-morphisme de P vers S. Plus générale-

ment un morphisme de feuillage différentiel [M], induit un QF-morphisme pour leurs structures canoniques de QF-variétés [II, 2, prop. 8].

Nous donnerons d'autres exemples de QF-morphismes au paragraphe 2.

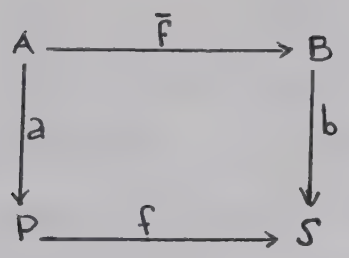
La définition d'un QF-atlas suppose l'existence d'un feuilletage (unique), [II, 1, df 1]. En considérant ces feuilletages, nous avons :

Proposition 2

Le relèvement $\bar{f}$ d'un QF-morphisme $f : P \longrightarrow S$ est un morphisme de variétés feuilletées.

Démonstration

Soit



l'atlas de f(correspondant à $\bar{f}$). Pour $x \in A$, soit A'_x la feuille du feuillètage A' de A passant par x ; la restriction de $\bar{f}$ à A'_x est une application différentiable de A'_x dans la sous-variété immergée b^{-1} (fa (x)) de B [I,2, df 8] ; donc $\bar{f}(A'_x)$ est contenue dans une seule composante connexe de b^{-1}(fa (x)) muni de sa structure de sous-variété ouverte de B' [II, 1, df 1], c'est-à-dire dans la feuille de B' passant par $\bar{f}$ (x).

Proposition 3

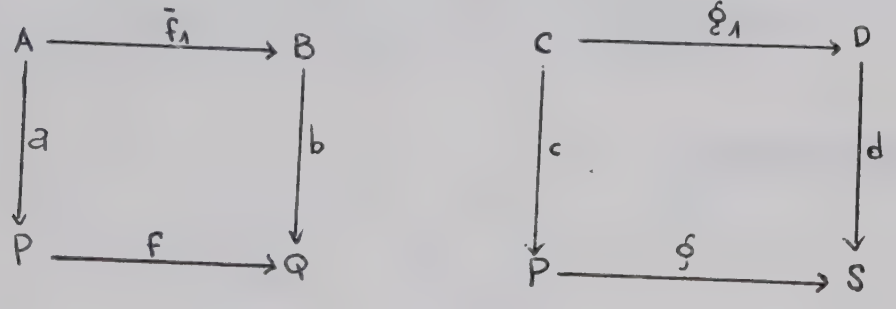
Soient $f : P \longrightarrow Q$ et $g : P \longrightarrow S$ deux QF-morphismes.

(i) Il existe des relèvements de f et g de même atlas source,

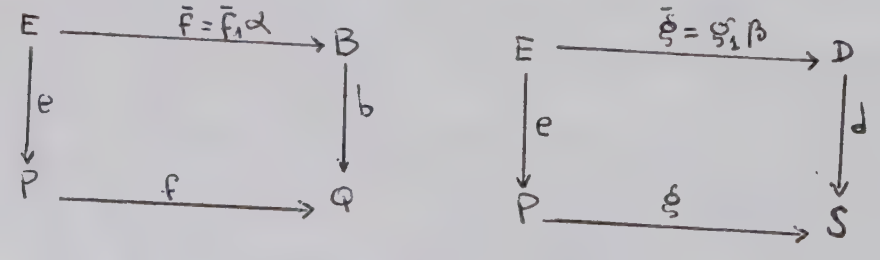
(ii) Si Q = S et si f et g admettent un relèvement commun, alors f = g.

Démonstration

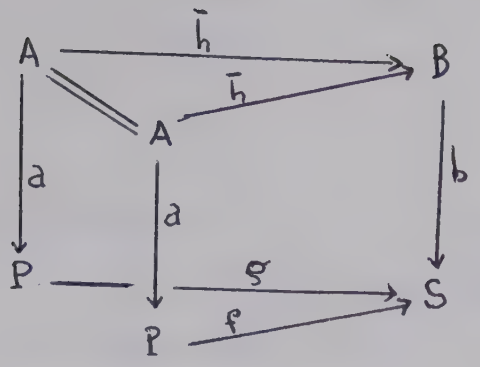
(i) D'après la définition des QF-morphismes, f et g admettent respectivement des atlas



Or (A, a, P) et (C, c, P) sont des atlas équivalents de P, donc [II, 3, th 3, cor 1], il existe des surmersions $\alpha : E \longrightarrow A$, $\beta : E \longrightarrow C$ telles que $a\alpha = c\beta$. Par suite [II, 1, prop 3], $(E, a\alpha = b\beta = e, P)$ est un atlas de P. On en déduit les atlas suivant de f et g respectivement :



(ii) Pour démontrer (ii), soit $\bar{h} : A \longrightarrow B$ un relèvement commun de f et g. On a alors le diagramme ensemblistement commutatif :



Comme $fa = ga = b\bar{h}$ et que a est surjective, on en déduit que $f = g$.

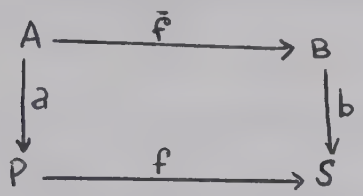
b) Compositions des QF-morphismes et atlas surcartésiens d'un QF-morphisme

Définition 3

Un atlas d'un QF-morphisme sera appelé étale si les atlas source et but [df 2] sont étales (mais le relèvement peut être un morphisme quelconque de variétés).

Définition 4

On dira que l'atlas étale



du QF-morphisme f est surcartésien si l'application $A \longrightarrow P \underset{S}{\times} B$ est surjective.

Le résultat suivant sera surtout utile pour ses corollaires :

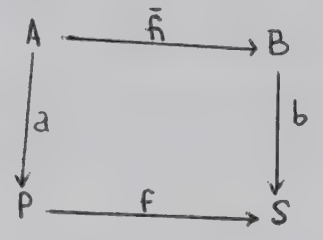
Proposition 4

Tout QF-morphisme $f : P \longrightarrow S$ admet un relèvement d'atlas but donné.

Démonstration

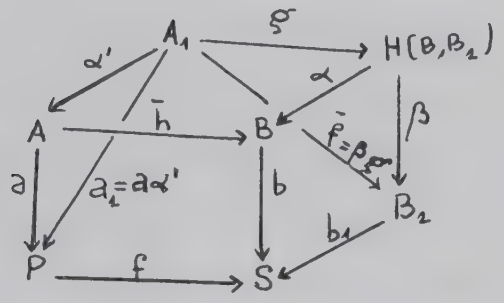
Soit

(1)



un atlas de f ; si (B_1, b_1, S) est un atlas quelconque de S, nous avons le diagramme ensemblistement commutatif suivant :

(2)



où $A_1 = A \underset{B}{\times} H(B, B_1)$; α étant une submersion, il en est de même de α' ; donc [II, 1, prop. 3], $(A_1, a\alpha', P)$ est un atlas de P. Alors $\beta g = \tilde{f}$ est un relèvement de f d'atlas but (B_1, b_1, S).

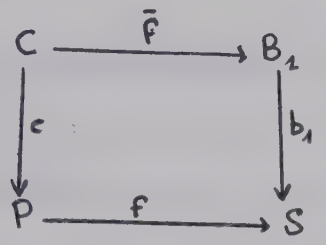
Nous utiliserons constamment la conséquence suivante de la proposition 4 qui justifie une fois de plus l'importance des atlas étales.

Corollaire 1

Tout QF-morphisme admet un atlas surcartésien (donc en particulier étale) dont le but est un atlas étale donné.

Démonstration

La démonstration reprend celle de la proposition 4. en choisissant l'atlas (B_1, b_1, S) étale, et en remplaçant ensuite (A_1, a_1, P) par un atlas étale $(C, a_1 j, P)$ (où j est une immersion de C sur A_1 construite comme dans [II, prop. 5, corol. 2]) et $\bar{f}$ par $\bar{f}j$; d'où l'atlas étale de f :



Pour montrer que cet atlas est surcartésien , il reste à montrer que l'application $(c,\bar{f}) : C \longrightarrow P \underset{S}{\times} B_1$ est surjective ; l'immersion $j : C \longrightarrow A_1$ étant surjective, il suffit de vérifier que $A_1 \longrightarrow P \underset{S}{\times} B_1$ est surjective. Utilisons pour cela le diagramme (2) de la démonstration de la proposition 4 : si $(y_1,y_2) \in P \underset{S}{\times} B_1$, a étant surjective, il existe $x_1 \in A$, tel que $a(x_1) = y_1$; alors $b(\bar{h}(x_1)) = b_1(y_2)$, et d'après la propriété $(QF)_1$ des QF-carrés il existe $x_2 \in H^1(B,B_1)$ tel que $(\beta,\alpha)(x_2) = (y_2, \bar{h}(x_1))$. Par suite (x_1, x_2) est un élément de A_1 tel que $(a_1, \bar{f})(x_1,x_2)=(y_1, y_2)$.

Remarque 2

Même sans supposer (B_1, b_1, S) étale, la démonstration de la surjectivité de l'application $A_1 \longrightarrow P \underset{S}{\times} B_1$ reste valable .

Corollaire 2

Soient $f : P \longrightarrow S$ et $g : P \longrightarrow S$ deux QF-morphismes. Alors il existe des atlas de f et g de même source et de même but, ce dernier pouvant de plus être choisi arbitrairement.

Démonstration

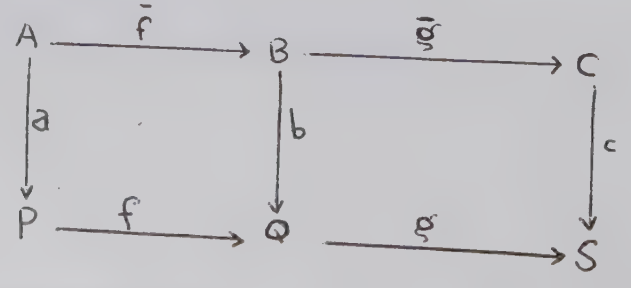
D'après la proposition 4, on peut supposer que f et g admettent des atlas de même but donné. Le reste de la démonstration résulte alors de la démonstration de la partie (i) de la proposition 3 dans le cas où les buts des QF-morphismes sont égaux.

Corollaire 3

Si $f : P \longrightarrow Q$ et $g : Q \longrightarrow S$ sont deux QF-morphismes, alors gf est un QF-morphisme.

Démonstration

Pour construire un atlas de gf, on considère d'abord un relèvement $\bar{g}$ de g d'atlas source (B, b, Q) . D'après la proposition précédente, f admet un relèvement $\bar{f}$ d'atlas but (B,b,Q) ; d'où le diagramme commutatif suivant dans la catégorie $\mathcal{E}$ des applications :



qui détermine un atlas de gf.

Le corollaire 3 signifie que les QF-morphismes sont les morphismes d'une catégorie dont les objets sont les QF-variétés.

Nous noterons $\mathcal{QF}$ cette catégorie et nous l'appelerons catégorie des QF-morphismes ou des QF-variétés.

c) Quelques propriétés de la catégorie $\mathcal{QF}$

Proposition 5

La catégorie $\mathcal{QF}$ des QF-morphismes possède des produits finis et des sommes quelconques.

Démonstration

L'existence des produits finis et des sommes quelconques résulte de la proposition 9' de [II, 2].

Désignons maintenant par :

$\mathcal{E}$ la catégorie des applications,

$\mathcal{C}$ la catégorie des applications continues,

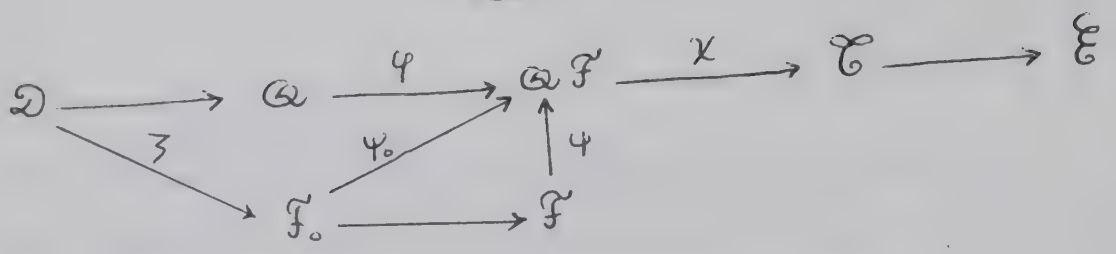
$\mathcal{D}$ la catégorie des applications différentiables

$\mathcal{Q}$ la catégorie des Q-morphismes [BA]

$\mathcal{F}_0$ la catégorie des morphismes de variétés feuilletées paracompactes

$\mathcal{F}$ la catégorie des morphismes de feuillages [M]

Nous avons le diagramme de foncteurs tous fidèles suivant :



où ζ est défini sur les objets en associant à toute variété différentiable A la variété feuilletée (A,A'), où A' est le feuilletage discret de A. Le foncteur φ résulte de la proposition 1 et il est pleinement fidèle. Les foncteurs ψ_o et ψ proviennent de l'exemple (iii) de a) et des propositions 6 et 7 de [II, 2]. Le foncteur χ résulte du (ii) de la remarque 1. Les autres foncteurs sont bien connus.

Grâce au foncteur φ, nous pourrons désormais identifier la catégorie $\mathcal{Q}$ des Q-morphismes (en particulier la catégorie $\mathcal{D}$) à une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{Q}\mathcal{F}$.

2) QF-submersions, QF-immersions et QF-étalements

a) Les sous-catégories $\mathcal{Q}\mathcal{F}\mathcal{S}$, $\mathcal{Q}\mathcal{F}\mathcal{I}$ et $\mathcal{Q}\mathcal{F}\mathcal{E}$

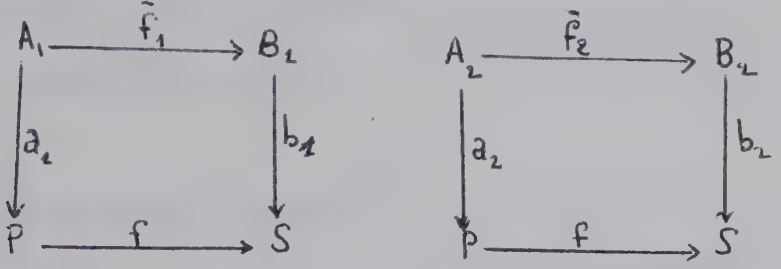
Définition 5

(i) Un QF-morphisme est une QF-submersion (respt. QF-immersion) s'il admet un relèvement submersif (respt. immersif).

(ii) Un QF-morphisme est un QF-étalement s'il est à la fois QF-immersif et QF-submersif.

Remarque 3

Un QF-morphisme $f : P \longrightarrow S$ est un QF-étalement si et seulement s'il admet un relèvement étale : en effet si f est un QF-étalement, il admet des atlas



où $\bar{f}_1$ est une submersion et $\bar{f}_2$ une immersion. a_2 étant surjective, pour tout $x_1 \in A_1$, il existe $x_2 \in A_2$ tel que $(x_1, x_2) \in A_1 \underset{S}{\times} A_2$. D'après la remarque 13 de [II, 3, b], on a $\dim_{x_1} A_1 = \dim_{x_2} A_2$ et $\dim_{\bar{f}_1(x_1)} B_1 = \dim_{\bar{f}_2(x_2)} B_2$. Il en résulte que la submersion $\bar{f}_1$ (respt l'immersion $\bar{f}_2$) est un étalement en x_1 (respt. en x_2). Donc f admet pour relèvement l'étalement $\bar{f}_1$ ou $\bar{f}_2$. La réciproque est évidente.

Remarque 4

Nous verrons au paragraphe 4 sur des exemples que tout relèvement d'une QF-submersion (respt. d'un QF-immersion, d'un QF-étalement) n'est pas nécessairement une submersion (respt. une immersion, un étalement).

Exemples de QF-submersions 2

1°) Soient P et S deux QF-variétés

(i) si P = S, l'application identique est une QF-submersion .

(ii) si S est réduite à un point, toute application

$f : P \longrightarrow S$ est une QF-submersion : en effet S est une variété de QF-atlas (S, id_S, S) et pour tout atlas (A, a, P) de P, $fa : A \longrightarrow S$ est une submersion qui relève f.

(iii) les projections canoniques de la QF-variété $P \times S$ [II, 2, prop 9'] dans P et S sont des QF-submersions.

(iV) si P est une sous-QF-variété ouverte de S [II, 2, d], l'injection canonique de P dans S est une QF-submersion, car pour tout atlas (B, b, S) de S, $b^{-1}(P) = A$ est un ouvert de B et $(A, b|_A, P)$ est un atlas de P.

2°) Soit P une QF-variété :

(i) pour tout atlas (A,a,P) de P, a est une QF-submersion surjective (lorsqu'on munit A de sa structure canonique de QF-variété).

(ii) si la QF-variété tangente TS est définie [II, 3, a], la projection canonique de TS dans S est une QF-submersion surjective.

3°) Soit A une variété paracompacte, U un ouvert de A, A' un feuilletage de A ; soit $a : A \longrightarrow A/A'$ la projection canonique de A sur A/A'. On a les deux QF-variétés suivantes : a(U) (qui est une sous-QF-variété ouverte de A/A') d'atlas $(U, a|_U, a(U))$, et $U/_{U'}$, (où U' est le feuilletage induit sur U par A') d'atlas $(U, u, U/_{U'})$, u étant la projection canonique de U sur $U/_{U'}$. Nous avons une application

évidente de a(U) dans U/U' qui est une QF-submersion car elle admet pour relèvement id_U.

4°) Si $(P_i)_{i \in I}$ est une famille de QF-variétés, P la somme des P_i [prop. 5], l'injection canonique de P_i dans P est une QF-submersion.

Exemples de QF-immersions 3

(i) Si P est la QF-variété réduite à un élément, et S une QF-variété quelconque, toute application de P dans S est une QF-immersion.

(ii) Pour toute QF-variété P, l'application diagonale $\delta : P \longrightarrow P \times P$ est une QF-immersion car pour tout atlas (A, a, P) de P, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\bar{\delta}} & A \times A \\ \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle a \times a} \\ P & \xrightarrow{\delta} & P \times P \end{array}$$

où $\bar{\delta}$ est l'application diagonale, est un atlas de δ.

(iii) Les QF-submersions des exemples 1°) (i) et (iV), 3°) et 4°) ci-dessus sont aussi des QF-immersions.

Exemples de QF-étalements 4

Les exemples 1°) (i) et (iV), 3°) et 4°) de QF-submersions sont aussi des QF-étalements.

La démonstration de la proposition suivante est analogue à celle de la proposition 4.

Proposition 6

Toute QF-submersion (respt. toute QF-immersion, tout QF-étalement) f : P ⟶ S admet un relèvement submersif (respt. immersif, étale) d'atlas but donné.

Nous en déduisons, comme au corollaire 3 de la proposition 4, que :

- Les QF-submersions forment une sous-catégorie $\mathfrak{QS}$ de $\mathfrak{QF}$.
- Les QF-immersions forment une sous-catégorie $\mathfrak{QI}$ de $\mathfrak{QF}$.

Il en résulte que les QF-étalements forment aussi une sous-catégorie $\mathfrak{QE}$ de $\mathfrak{QF}$.

Le foncteur φ [u, l, c] de la catégorie $\mathfrak{Q}$ des Q-variétés vers la catégorie $\mathfrak{QF}$ induit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des Q-submersions (respt. Q-immersions) vers $\mathfrak{QFS}$ (respt. $\mathfrak{QFI}$).

La définition suivante est justifiée par la remarque 3.

Définition 6

On dira qu'un atlas d'une QF-submersion (respt. d'une QF-immersion, d'un QF-étalement) est adapté s'il est étale [B3], et si le relèvement correspondant est une submersion (respt. une immersion, un étalement).

Proposition 7

Toute QF-submersion (respt. toute QF-immersion, tout QF-étalement) admet un atlas surcartésien [df 4] et adapté de but donné.

Démonstration

Soit $f : P \longrightarrow S$ un QF-morphisme; si f est une QF-submersion (respt. QF-immersion, QF-étalement), la construction d'un atlas surcartésien et adapté de f se fait comme dans la démonstration du corollaire 1 de la proposition 4 en partant d'un relèvement submersif (respt. immersif, étale) $\bar{f}$ de f.

b) Caractérisation des QF-atlas

Proposition 8

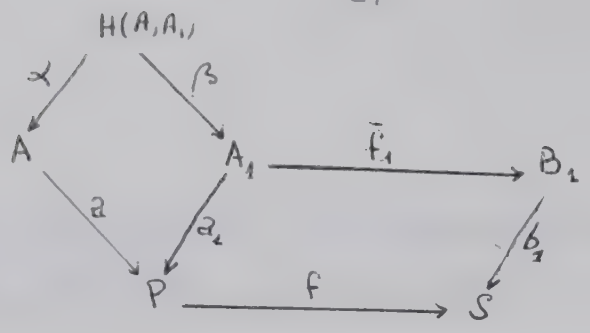
Soit $f : P \longrightarrow S$ une QF-submersion surjective. Pour tout atlas (A,a,P) de P, (non nécessairement étale), (A,fa,S) est un atlas de S

Démonstration

Prenons un atlas adapté de f :

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\bar{f}_1} & B_1 \\ \downarrow{\scriptstyle a_1} & & \downarrow{\scriptstyle b_1} \\ P & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

Nous avons le diagramme commutatif suivant dans $\mathcal{QF}$, avec des notations évidentes :



où α, β et $\bar{f}_1$ sont des submersions. Comme $b_1 \bar{f}_1 \beta = fa\alpha$ est surjective, $(H(A,A_1), b_1\bar{f}_1\beta, S)$ est un atlas de S [II,1, prop 3], donc aussi (A, fa, S) [II, 1, prop 4], car α est surjective.

Corollaire 1

Soient A une variété, P une QF-variété, a une application de A dans P. Alors (A, a, P) est un atlas de P si et seulement si a est une QF-surmersion.

En effet si a est une QF-surmersion, il suffit de faire P = A dans la proposition précédente, car $(A, 1_A, A)$ est un atlas de A. La réciproque est évidente car a admet pour relèvement 1_A.

Corollaire 2

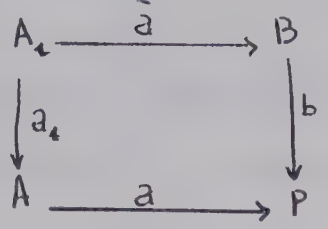
Avec les notations et hypothèses du corollaire 1, (A, a, P) est un atlas étale de P si et seulement si a est un QF-étalement surjectif.

Démonstration

- Si (A,a,P) est un atlas étale de P, il est clair que a est QF-étale car a admet pour relèvement l'application identique de A. Inversement,

- Supposons a QF-étale surjective, alors (corol 1) (A,a,P) est un atlas de P. D'autre part [prop. 7], a admet

un relèvement $\bar{a} : A_1 \longrightarrow B$ qui est un étalement, d'où l'atlas de a :



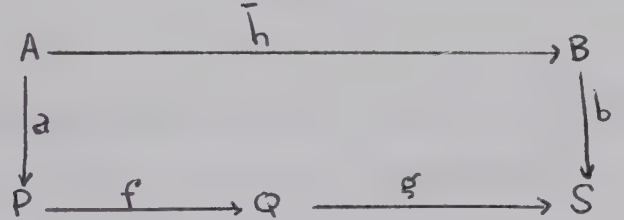
donc [II, 1, prop.3] , $(A_1, b\bar{a}, P)$ est un atlas étale de P, donc [II, 1, prop.4] , (A, a, P) est un atlas étale de P, car a_1 est un étalement.

Corollaire 3

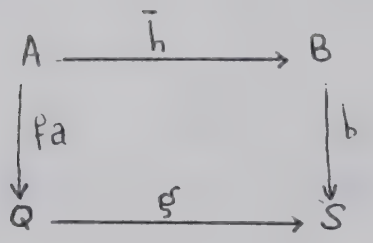
Les QF-submersions surjectives ont la propriété universelle des quotients.

Démonstration

Soient $f : P \longrightarrow Q$ une QF-submersion surjective, $g : Q \longrightarrow S$ une application telle que gf soit un QF-morphisme. Nous avons le diagramme commutatif dans $\mathcal{E}$ suivant :



qui définit un atlas de gf ; a et f étant QF-submersives et surjectives, il en est de même de fa , donc (corol. 1), (A, fa, Q) est un atlas de Q ; d'où l'atlas suivant de g :



c) Une propriété remarquable des QF-submersions.

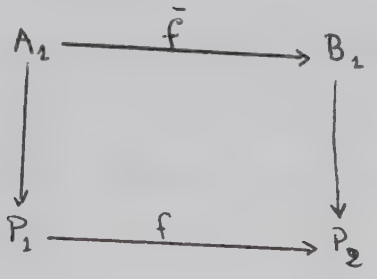
Soulignons le résultat suivant sur les QF-submersions :

Proposition 9

Soit $f : P_1 \longrightarrow P_2$ une QF-submersion. Toute submersion $\bar{f} : A_1 \longrightarrow A_2$ relevant f, induit un foncteur différentiable $\bar{\bar{f}}$ de $H(A_1)$ vers $H(A_2)$. Si de plus A_1 et A_2 sont des atlas étales, alors $\bar{\bar{f}}$ est une submersion.

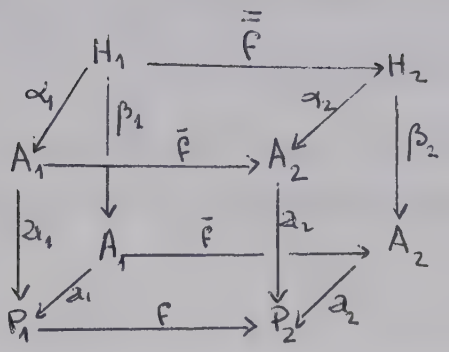
Démonstration

Soit



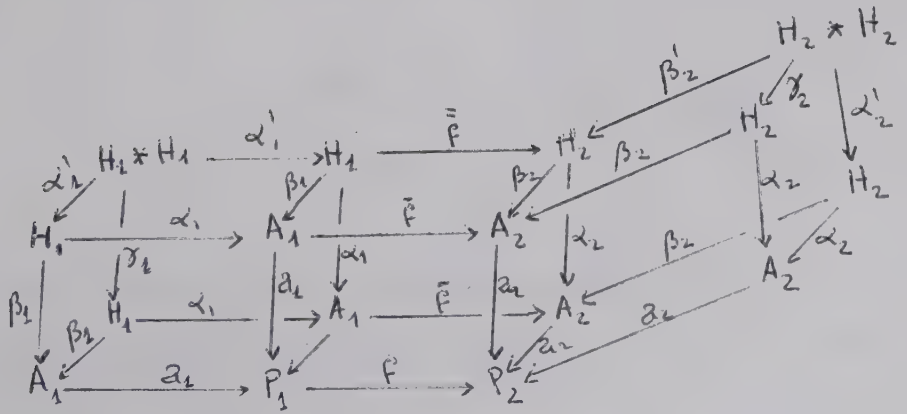
un atlas de f tel que $\bar{f}$ soit une submersion. Pour i=1,2, désignons par H_i le groupoïde d'holonomie de (A_i, a_i, P_i), par α_i et β_i les projections source et but de H_i sur A_i. En appliquant $(QF)_3$ au couple de submersions $\bar{f}\alpha_1$ et $\bar{f}\beta_1$ de H_1 dans A_2 et à la QF-fourche $H_2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightrightarrows}} A_2 \xrightarrow{a_2} P_2$, on en déduit une unique application différentiable $\bar{\bar{f}} : H_1 \longrightarrow H_2$ rendant commutatif dans $\mathcal{QF}$ le diagramme :

(2)



Pour i = 1, 2, notons γ_i la loi de composition partielle dans H_i et posons $H_i * H_i$ la sous-variété plongée $H_i \times H_i$ de $H_i \times H_i$. D'après le diagramme (2), $\bar{\bar{f}} \times \bar{\bar{f}}$: $H_1 \times H_1 \longrightarrow H_2 \times H_2$ induit une application différentiable $\bar{\bar{f}} * \bar{\bar{f}}$ de $H_1 * H_1$ dans $H_2 * H_2$. Pour montrer que $\bar{\bar{f}}$ est un foncteur, il reste d'après le diagramme (2), seulement à montrer que $\bar{\bar{f}}\ \gamma_1 = \gamma_2\ (\bar{\bar{f}} * \bar{\bar{f}})$. En utilisant le diagramme définissant γ_i [II, 3, prop. 10] , nous avons le diagramme suivant qui commute dans $\mathfrak{Q}\mathcal{F}$:

(3)



En appliquant $(Q\,F)_3$ au couple de submersions $\bar{f}\alpha_1\alpha'_1 = \alpha_2 \bar{\bar{f}}\alpha'_1$ et $\bar{f}\beta_1\beta'_1 = \beta_2 \bar{\bar{f}}\beta_1$ de $H_1 * H_2$ dans A_2 (car $a_2\bar{f}\alpha_1\alpha'_1 = a_2\bar{f}\beta_1\beta'_1$), on déduit une unique application différentiable $h : H_1 * H_1 \longrightarrow H_2$ telle que

$$\beta_2 h = \bar{f}\alpha_1\alpha'_1$$

$$\alpha_2 h = \bar{f}\beta_1\beta'_1$$

Pour montrer l'égalité $\bar{\bar{f}}\gamma_1 = \gamma_2(\bar{\bar{f}} * \bar{\bar{f}})$, il suffit alors de montrer que $\bar{\bar{f}}\gamma_1 = k$ et $\gamma_2(\bar{\bar{f}} * \bar{\bar{f}}) = k$, donc par unicité de vérifier que :

$$\begin{cases} \beta_2 \bar{\bar{f}}\gamma_1 = \bar{f}\alpha_1\alpha'_1 \\ \alpha_2 \bar{\bar{f}}\gamma_1 = \bar{f}\beta_1\beta'_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \beta_2\gamma_2(\bar{\bar{f}} * \bar{\bar{f}}) = \bar{f}\alpha_1\alpha'_1 \\ \alpha_2\gamma_2(\bar{\bar{f}} * \bar{\bar{f}}) = \bar{f}\beta_1\beta'_1 \end{cases}$$

Or du diagramme (3) on déduit que :

$$\beta_2 \bar{\bar{f}}\gamma_1 = \bar{f}\beta_1\gamma_1 = \bar{f}\beta_1\beta'_1$$

$$\alpha_2 \bar{\bar{f}}\gamma_1 = \bar{f}\alpha_1\gamma_1 = \bar{f}\beta_1\beta'_1$$

de même

$$\beta_2\gamma_2(\bar{\bar{f}} * \bar{\bar{f}}) = \beta_2\beta'_2(\bar{\bar{f}} * \bar{\bar{f}}) = \bar{f}\beta_1\beta'_1$$

$$\alpha_2\gamma_2(\bar{\bar{f}} * \bar{\bar{f}}) = \alpha_2\alpha'_2(\bar{\bar{f}} * \bar{\bar{f}}) = \bar{f}\alpha_1\alpha'_1$$

d'où le résultat.

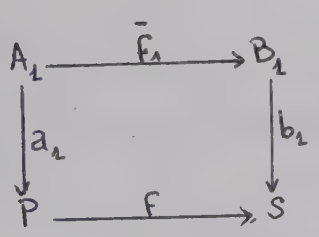
Le reste de la démonstration est immédiat , car si α_1 et α_2 sont étales, $\bar{\bar{f}}$ est une submersion si (et seulement si) $\bar{f}$ en est une.

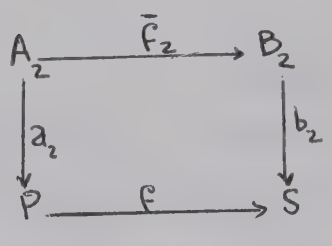
d) Etude des atlas adaptés d'une QF-submersion

Soit $f : P \longrightarrow S$ une QF-submersion. Nous allons définir dans la classe des atlas adaptés [df 6] de f de même but, une relation de préordre filtrant.

Rappelons d'abord que nous désignons un atlas d'un QF-morphisme par le relèvement correspondant [df 2 et remarque 1 (i)].

Soient

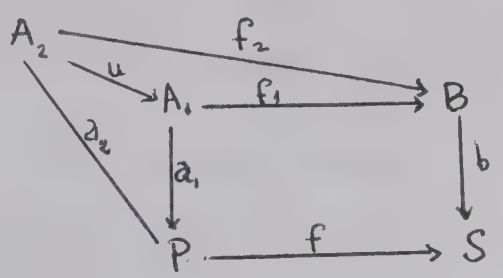




deux atlas adaptés de f [df 6]. Posons la définition suivante :

Définition 7

On dira que $\bar{f}_2$ domine $\bar{f}_1$ (ce qu'on notera $\bar{f}_1 \prec \bar{f}_2$), si $B_1 = B_2 = B$ et $b_1 = b_2 = b$ et s'il existe une submersion $u : A_2 \longrightarrow A_1$ rendant commutatif dans $\mathcal{A}\mathcal{F}$ le diagramme :



La relation de "domination" est, de façon évidente, une relation de préordre entre les atlas adaptés de la QF-submersion f.

Remarque 5

Remarquons que la submersion u de la définition 7 est un étalement car les variétés A_1 et A_2 sont de même dimension, les atlas (A_1, a_1, P) et (A_2, a_2, P) étant étales et équivalents [II, 3, remarque 14] .

Etablissons d'abord le lemme suivant :

Lemme

Soient $f : P \longrightarrow S$ une QF-submersion, $\bar{f}_1$, $\bar{f}$ et $\bar{f}_2$ des atlas adaptés de f tels que :

1°) $\bar{f}_1$ et $\bar{f}$ admettent un majorant commun

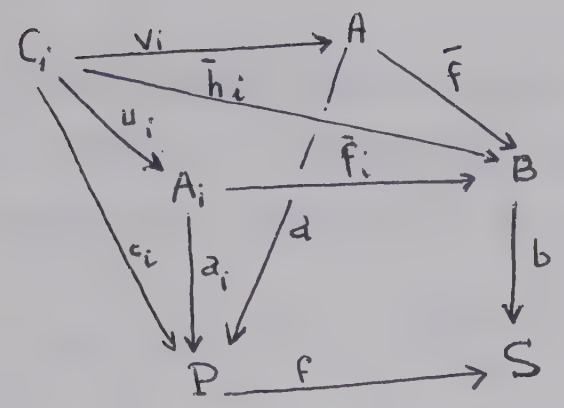
2°) $\bar{f}_2$ et $\bar{f}$ admettent un majorant commun

Alors $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ et $\bar{f}$ admettent un majorant commun

Démonstration

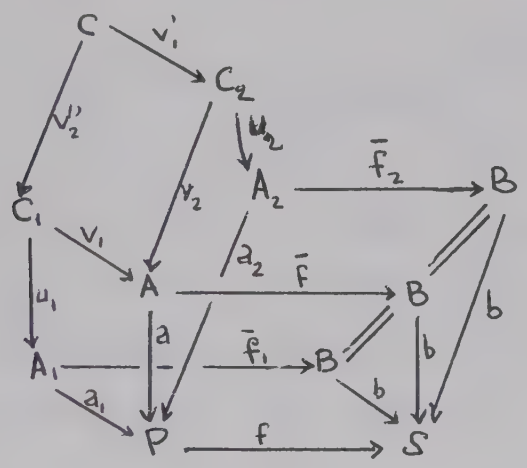
D'après la définition 7 et les hypothèses, $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ et $\bar{f}$ ont même atlas but (B, b, S). Pour i = 1, 2, notons $\bar{h}_i$ un majorant de $\bar{f}_i$ et $\bar{f}$. On a donc le diagramme suivant commutatif dans la catégorie $\mathfrak{A}\mathfrak{F}$:

(1)



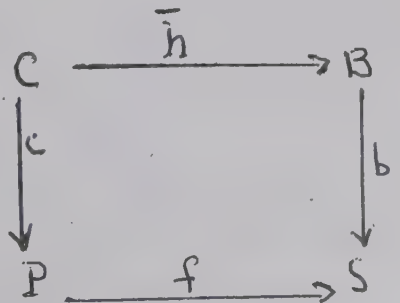
Les u_i et v_i (i = 1, 2) sont des étalements d'après la remarque5 . Posons $C = C_1 \underset{A}{\times} C_2$; on a le diagramme commutatif dans $\mathfrak{S}$ suivant :

(2)



v_1 et v_2 étant des étalements, il en est de même de v'_1 et v'_2 ; par suite [II, 1, prop. 3] $(C, cv_2v'_1 = a_1u_1v'_2 = a_2u_2v'_1 = c, P)$ est un atlas étale de P, et $\bar{f}_2u_2v'_1 = \bar{h} : C \longrightarrow B$ est une submersion relevant f ; d'où l'atlas adapté $\bar{h}$ suivant de f :

(3)



Vérifions que l'atlas $\bar{h}$ domine les atlas $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ et $\bar{f}$.

D'après le diagramme (2) on a successivement :

$\bar{f}_1\ u_1\ v_2' = \bar{f}_2\ u_2\ v_1' = \bar{h}$ qui implique que $\bar{f}_1 \prec \bar{h}$ et $\bar{f}_2 \prec \bar{h}$

$\bar{f}\ v_1\ v_2' = \bar{f}\ v_2 v_1' = \bar{f}_2\ u_2\ v_1' = \bar{h}$, donc $\bar{f} \prec \bar{h}$

Proposition 10

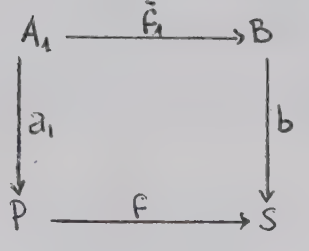
Soit f : P ⟶ S une QF-submersion.

Alors la classe des atlas adaptés de f de même atlas but, munie de la relation de préordre " $\prec$ " est filtrante à droite.

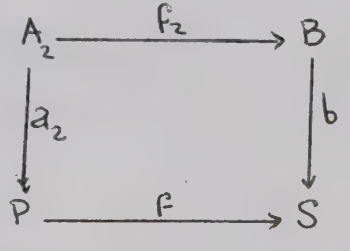
Démonstration

Considérons :

(1)

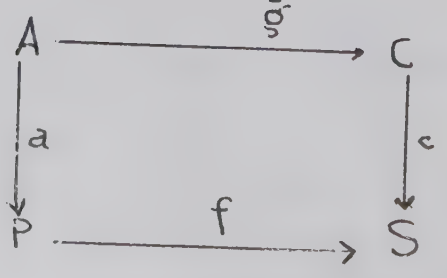


et (2)



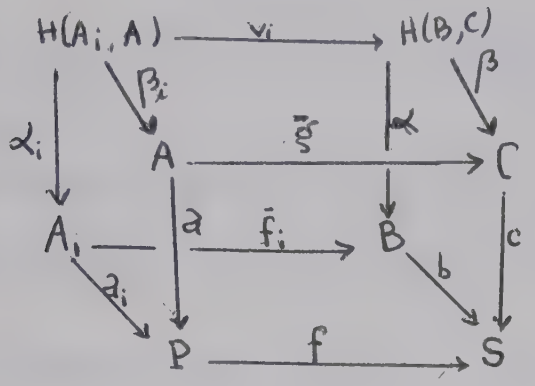
deux atlas adaptés de f de même but l'atlas étale (B,b,S), et

(3)



un atlas adapté quelconque de f. Pour i = 1, 2, nous avons le diagramme suivant qui commute dans $\mathcal{QF}$, et dans lequel v_i est justifié comme ci-après :

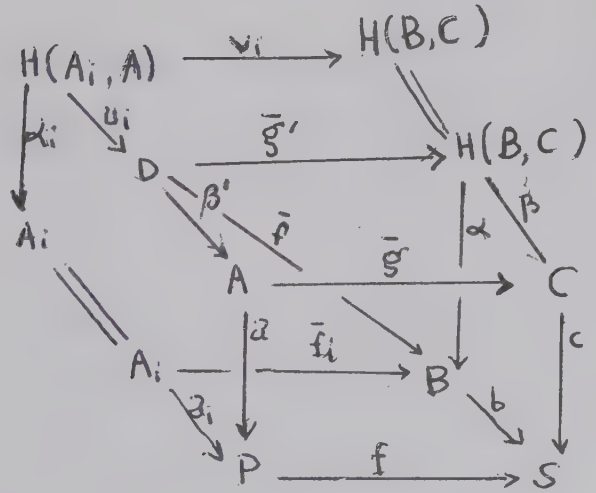
(4)



$i = 1, 2.$

v_i s'obtient en appliquant $(QF)_3$ au couple de submersions $\bar{f}_i \alpha_i : H(A_i, A) \longrightarrow B$ et $\bar{g} \beta_i : H(A_i, A) \longrightarrow C$. Posons $D = A \underset{C}{\times} H(B, C)$. D'après la propriété universelle des diagrammes cartésiens dans la catégorie $\mathcal{D}$, on a une unique application différentiable $u_i : H(A_i, A) \longrightarrow D$ rendant commutatif dans $\mathcal{QF}$ le diagramme :

(5)



$i = 1, 2$

β' étant un étalement et d'après [II, 1, prop. 4] , $(D, a_{\beta'}=d, P)$ est un atlas étale de P et alors $\alpha\bar{g}' = \bar{f} : D \longrightarrow B$ est une submersion relevant f ; on a aussi les égalités (voir diagramme (5)) :

$$\alpha v_i = \alpha\bar{g}' u_i = \bar{f} u_i = f_i \alpha_i \quad , \; i = 1, 2.$$

Donc, :

$\bar{f}_1$ et $\bar{f}$ ont un majorant commun qui est αv_1,

$\bar{f}_2$ et $\bar{f}$ ont un majorant commun qui est αv_2

D'après le lemme, $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ et $\bar{f}$ admettent un majorant commun, donc aussi $\bar{f}_1$ et $\bar{f}_2$.

3 - QF-variété régulière et QF-morphismes tangents

a) QF-variété réguliere

La notion de QF-variétés régulières que nous introduisons ici aura pour principale conséquence le fait que tout atlas étale [df 3] d'une QF-submersion (respt. d'un QF-étalement) dont le but est une QF-variété régulière est adapté [df 6].

Soit P une QF-variété, (A,a,P) un atlas étale de P

Définition 8

(i) Un germe de quasi-holonomie de (A, a, P) en $x \in A$, est le germe en x d'une application différentiable φ d'un voisinage ouvert de x dans A telle que $a\varphi = a$.

Autrement dit que φ relève localement l'application identique de P.

(ii) L'atlas (A, a, P) est dit régulier si tout germe de quasi-holonomie de A est un germe d'holonomie (c'est-à-dire inversible).

Bien entendu cette définition peut s'adapter à un atlas non nécessairement étale de P.

Proposition 11

Soit (A, a, P) un atlas étale et régulier de P. Alors tout atlas étale (B, b, P) de P équivalent à (A, a, P) est aussi régulier.

Démonstration

Soient $y \in B$, g un représentant d'un germe de quasi-holonomie de B en y. Il existe $x \in A$ tel que by = ax, car a est surjective. Donc [II, 3, th. 3, corol. 1], il existe un difféomorphisme local σ de B dans A tel que $\sigma y = x$ et $a\sigma = b$; $h = \sigma g \sigma^{-1}$ définit un germe de quasi-holonomie de A en x, donc inversible (car (A, a, P) est régulier), donc g aussi.

La proposition précédente justifie donc la définition suivante qui est indépendante de l'atlas étale choisi :

Définition 9

Une QF-variété est dite régulière si elle admet un atlas étale régulier.

Exemples de QF-variétés régulières 5

1°) Si P est une QF-variété régulière, alors toute sous-QF-variété ouverte de S est une QF-variété régulière.

2°) Toute Q-variété P est une QF-variété régulière : en effet soit (A, a, P) un QF-atlas de P, h le représentant d'un germe de quasi-holonomie de (A, a, P) en $x \in A$; il existe

un représentant de germe d'holonomie σ tel que $\sigma(x) = h(x)$. De plus d'après la définition 8, $a\sigma = a = a\,h$. En supposant σ et h définis sur un même voisinage de x, la condition b, de la définition de [BA] page 239, implique que σ et h coïncident sur un voisinage de x ; d'où le résultat.

3°) La QF-variété $\mathbb{R}_+$ [II, 2, a] est régulière, car le QF-atlas $(\mathbb{R}, a., \mathbb{R}_+)$ est régulier : toute application différentiable $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}$ telle que $|h(x)| = |x|$ est soit la symétrie par rapport à l'origine, soit l'identité.

Exemple de QF-variétés non régulières 6.

Considérons l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. On peut construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de difféomorphismes C^∞ de $\mathbb{R}$ telles que :

- $f_n(o) = o \quad \forall\, n$,
- $f_n = f$ en dehors d'un intervalle $]-x_n, x_n[$ et a un contact d'ordre infini avec f en $-x_n$ et x_n,
- la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers o.

Si Θ désigne le groupe engendré par les f_n, il est classique [H_2], de construire un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension un et de groupe d'holonomie G. Pour un tel feuilletage, f représente un germe de quasi-holonomie en l'origine : en effet si $x \in \mathbb{R}$, $x > o$ par exemple, il existe x_n tel que $o < x_n < x$ car la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers o, donc $f(x) = f_n(x)$; f(x) et x appartiennent alors à la même feuille de $\mathcal{F}$. Il en résulte que le germe de f en o est de quasi-holonomie et

pourtant non inversible en o.

Cet exemple peut être étendu à des cas plus sophistiqués.

Les QF-morphismes entre QF-variétés régulières forment une sous-catégorie pleine $\mathcal{QFR}$ de $\mathcal{QF}$. Elle contient comme sous-catégorie, la catégorie $\mathcal{Q}$ des Q-variétés d'après le 2e exemple.

Proposition 12

Une QF-variété P est régulière si et seulement si tout relèvement local de l'identité de P est un étalement.

Le résultat suivant permet de construire d'autres exemples de QF-variétés régulières.

Proposition 13

1°) La sous—catégorie $\mathcal{QFR}$ de $\mathcal{QF}$ est stable par produits finis et par somme quelconque.

Démonstration

1°) Démontrons que $\mathcal{QFR}$ est stable par produits finis : soient P et S deux QF-variétés régulières : montrons que P x S est régulière ; il suffit [prop. 10] de montrer que P x S admet un atlas régulier. P et S admettent des atlas étales réguliers respectifs (A, a, P) et (B, b, S).

Vérifions que (A x B, a x b, P x S) est un atlas régulier de P x S. Soit alors

$$\varphi : A \times B \longrightarrow A \times B$$

$$(x, y) \longrightarrow (\varphi_1 (x, y), \varphi_2 (x, y))$$

un représentant d'un germe de quasi-holonomie en $(x_o, y_o) \in A \times B$; de la relation $(a \times b)\varphi = a \times b$ on déduit :

$$a(pr_1) = \varphi_1$$

$$a(pr_2) = \varphi_2$$

L'application :

$$\varphi_{y_o} : A \longrightarrow A$$

$$x \longrightarrow \varphi_{y_o}(x) = \varphi_1 (x, y_o)$$

définit donc un germe de quasi-holonomie de A en x_o, donc est inversible ; par suite $d\varphi_{xo}(y_o) = d_1 \varphi_1(x_o, y_o)$ est inversible. De même $d_2 \varphi_2 (x_o, y_o)$ est inversible. D'autre part l'application :

$$A \longrightarrow B$$

$$x \longrightarrow \varphi_2 (x , y_o)$$

est à valeurs dans la classe $\tilde{y}_o$ de y_o, donc différentiable comme telle car $\tilde{y}_o$ est une sous variété immergée de B ; la topologie de la variété $\tilde{y}_o$ étant discrète, on en déduit que $d_1 \varphi_2 (x_o, y_o) = o$. De même $d_2 \varphi_1(x_o, y_o) = o$. La matrice jacobienne de φ en (x_o, y_o) est donc de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & N \end{array}\right)$$

avec M et N inversibles. φ est donc inversible en (x_o, y_o).

@FR est stable par somme

Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de QF-variétés régulières ; pour tout $i \in I$, soit (A_i, a_i, P_i) un atlas étale et régulier de P_i. Alors $(\Sigma A_i, \Sigma a_i, \Sigma P_i)$ est un atlas étale de ΣP_i. Un germe de quasi-holonomie de ΣA_i induit nécessairement un germe de quasi-holonomie d'un A_j, donc est inversible, A_j s'identifiant à un ouvert de ΣA_i.

Proposition 14

Soit P une QF-variété. S'il existe un atlas étale (A, a, P) de P tel que $\pi : H(A) = H \longrightarrow A \times A$ soit une application propre, alors P est une QF-variété régulière.

Démonstration

Compte tenu de la proposition 11, il suffit de montrer que (A, a, P) est un atlas régulier.

Soient $x \in A$, et K un compact de A tel que $x \in K$; $\pi^{-1}(K \times K)$ est un quasi-compact de H(A) car π est propre.

D'autre part, π étant une immersion, est localement injective. On peut alors supposer qu'il existe deux recouvrements ouverts de $\pi^{-1}(K \times K)$, $(V_z)_{z \in \pi^{-1}(K \times K)}$ et $(W_z)_{z \in \pi^{-1}(K \times K)}$ tels que :

- $V_z \subset \bar{V}_z \subset W_z$ pour tout z
- $\pi|_{W_z}$ est un plongement
- $\alpha|_{W_z}$ et $\beta|_{W_z}$ sont injectives

où $\alpha = \alpha_H$, $\beta = \beta_H$. Comme $\pi^{-1}(K \times K)$ est quasi-compact, il existe un recouvrement fini $(V_i)_{i \in L}$ de $\pi^{-1}(K \times K)$; alors $(\bar{V}_i)_{i \in L}$ recouvre $\pi^{-1}(K \times K)$, et $(\pi(\bar{V}_i))_{i \in L}$ est un recouvrement de K x K. Posons :

$$I = \left\{ i \in L \text{ tel que } (x, x) \in \pi(\bar{V}_i) \right\}$$

$$J = L - I$$

Comme $(x, x) \notin \bigcup_{j \in J} \pi(\bar{V}_j)$ qui est un compact, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $(U \times U) \cap (\bigcup_{i \in J} \pi(\bar{V}_i)) = \phi$.

Donc $\pi^{-1}(U \times U) \subset \bigcup_{i \in I} \bar{V}_i \subset \bigcup_{i \in I} W_i$, c'est-à-dire que

$(U \times U) \cap R \subset \bigcup_{i \in I} \pi(W_i)$ où $R = A \times A$. Par suite $(U \times U) \cap R$ est contenu dans une réunion finie de nappes d'holonomies élémentaires (c'est-à-dire des graphes d'isomorphismes transversaux).

Montrons maintenant que A est régulier en x, c'est-

à-dire que tout germe de quasi-holonomie en x est inversible. Soit φ le représentant d'un tel germe. Comme $\varphi(x)$ et x ont même projection dans P, nous pouvons toujours supposer que $\varphi(x) = x$ (quitte à le composer par un isomorphisme transversal [II, 1, df 2], qui est ici un difféomorphisme local de source en $\varphi(x)$ et de but en x), et que φ est définie et à valeurs dans U. Puisque le graphe G_φ de φ est contenu dans $R = A \underset{S}{\times} A$ d'après la définition 8, on en déduit, d'après la construction précédente, que G_φ est contenu dans $(U \times U) \cap \mathcal{R}$, donc dans une <u>réunion finie</u> de nappes d'holonomie élémentaires et qui sont des sous-variétés plongées de A x A. Par suite tout vecteur tangent à G_φ en $(x, \varphi(x))$ est tangent à l'une de ces nappes. Si φ n'est pas inversible en x, il existe un vecteur tangent non nul $h \in T_x A$ tel que $(T\varphi)\, h = o$; le vecteur (h, o) serait tangent à G_φ et ne le serait à aucune nappe d'holonomie élémentaire.

<u>Remarque 6</u>

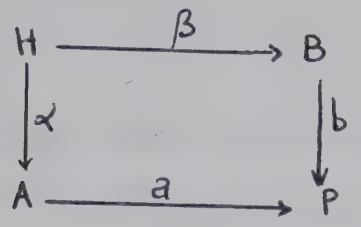
1°) L'hypothèse de propreté sur π implique que pour tout $x \in A$, $\pi^{-1}(x, x)$ est fini. Les groupes d'holonomie d'une telle QF-variété P sont donc finis. Mais cela ne saurait suffire pour assurer la régularité de P.

2°) La démonstration ne suppose pas H (A) séparé et il existe bien des atlas dont le groupoïde d'holonomie n'est pas séparé.

Le reste de ce paragraphe est consacré à l'exploitation de la condition de régularité.

Proposition 15

Soit



un QF-carré, où α et β sont des étalements. Si P est régulière, alors la conclusion de la condition $(QF)_3$ subsiste si dans les hypothèses une seule des applications est une submersion. De plus la 2e (application) ainsi que la factorisation canonique sont nécessairement des submersions.

Démonstration

Soient $f : C \longrightarrow A$ une submersion et $g : C \longrightarrow B$ une application différentiable telles que $af = bg$. Notons $f^{*}A'$ l'image réciproque du feuilletage (discret) A' de A [II, 1, prop. 1]. En tout point $z \in C$, f induit un difféomorphisme σ entre une sous-variété transverse à $f^{*}A'$ en z et un voisinage ouvert de f(z) [I, 1, remarque 1].

En identifiant A et B à des ouverts de la variété A + B, $g\sigma^{-1}$ définit un germe de quasi-holonomie de A + B en f(z), donc est inversible en f(z) car P est régulière, (et donc aussi l'atlas (A + B, (a, b), P) ; par suite la restriction de g à une petite sous-variété transverse à $f^{*}A'$ est un difféomorphisme sur un ouvert de B, g est alors une submersion ; et on peut appliquer $(QF)_3$ au couple de

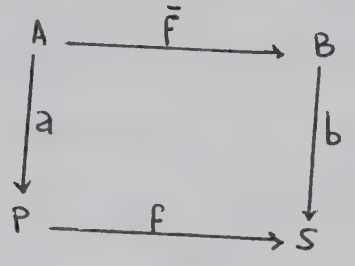
submersion (f, g) ; d'où l'existence et l'unicité de la factorisation, qui est une busmersion car α et β sont étales.

Corollaire 1

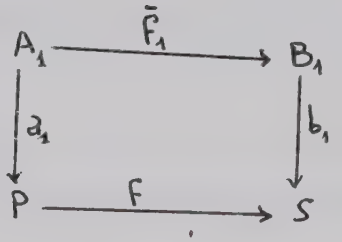
Soit f : P ⟶ S une QF-submersion; si S est régulière, alors tout atlas étale de f est adapté [III, 2, df 6].

Démonstration

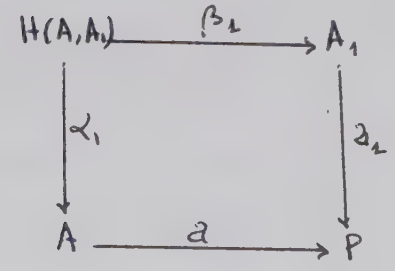
Soient



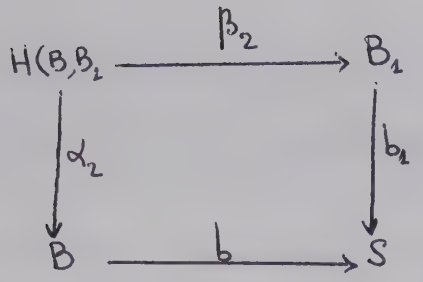
un atlas adapté de f, et



un atlas quelconque de f. D'après le théorème 3 de [II, 3, b]. il existe des QF-carrés :



et

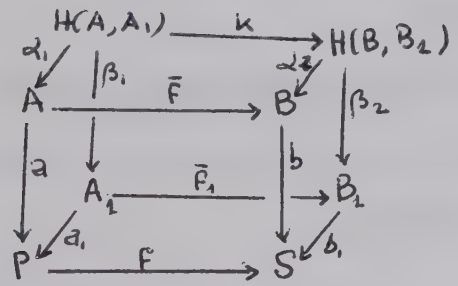


où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ et β_2 sont des étalements. En appliquant la proposition précédente au couple d'applications **différentiables**

$$\bar{f}\,\alpha_1 : H(A, A_1) \longrightarrow B$$

$$\bar{f}\,\beta_1 : H(A, A_1) \longrightarrow B_1$$

(car $\bar{f}\alpha_1$ est une submersion), on a une unique submersion $k : H(A, A_1) \longrightarrow H(B, B_1)$ qui rend commutatif dans $\mathcal{F}$ le diagramme :



Les β_i et α_i (i = 1, 2) étant des étalements, et k une submersion, $\bar{f}_1$ est une submersion.

Corollaire 2

Soit $f : P \longrightarrow S$ un QF-étalement. Si S est régulière, alors tout atlas de f est adapté [LII,2,df 6].

Démonstration

Rappelons que f étant QF-étale, les atlas étales de P et S ont même dimension (au-dessus d'un même point de S) [II,3,remarque 14]. Soit alors $\bar{f}$ un relèvement quelconque de f. D'après le corollaire 1, $\bar{f}$ est une submersion entre variétés de même dimension, donc un étalement.

Corollaire 3

Soient $f : P \longrightarrow Q$ et $g : Q \longrightarrow S$ deux QF-morphismes tels que gf soit une QF-submersion. Si S est régulière, alors :

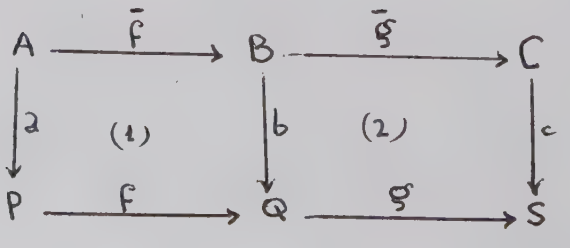
1°) si gf est QF-étale, f est une QF-immersion.

2°) si gf et g sont QF-étales, il en est de même de f.

3°) si f est surjective, g est une QF-submersion.

Démonstration

D'après le corollaire 3 de la proposition 4, on peut supposer qu'on a un atlas étale de gf de la forme



où les carrés (1) et (2) sont des atlas étales respectifs de f et g. S étant régulière $\overline{\overline{gf}}$ est une submersion (corol. 1) ;

1°) si gf est QF-étale, alors S étant régulière, $\overline{\overline{gf}}$ est un étalement (corol. 2), donc $\bar{f}$ est une immersion et f une QF-immersion.

2°) si gf et g sont QF-étales, $\overline{\overline{gf}}$ et $\bar{g}$ sont des étalements (corol. 2), donc $\bar{f}$ aussi et f est QF-étale.

3°) supposons f surjective ; d'après le corollaire 1 de la proposition 4, on peut supposer que l'atlas de f est <u>surcartésien</u> [III, 2, df 3 et 4] ; f étant surjective, il en sera alors de même pour $\bar{f}$; comme $\overline{\overline{gf}}$ est une submersion et $\bar{f}$ surjective, $\bar{g}$ est une submersion et g une QF-submersion.

<u>Remarque 7</u>

L'importance de l'hypothèse de régularité dans les corollaires 1, 2, et 3 précédents apparaît dans l'exemple suivant : supposons P = Q = S une QF-variété <u>non régulière</u>. Si (A, a, P) est un atlas de P, P étant non régulière on peut supposer de plus, quitte à remplacer P par une sous-QF-variété ouverte, qu'il existe un représentant de germe de quasi-holonomie non inversible $h : A \longrightarrow A$ tel qu'on ait

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & A \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ P & \xrightarrow{id_P} & P \end{array}$$

Or

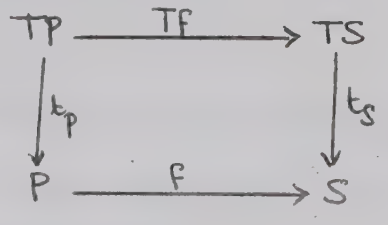
1°) h relève le QF-étalement id_P et n'est même pas une submersion,

2°) $id_P = ah$ est un QF-étalement et h n'est pas une submersion.

b) QF-morphismes tangents

Nous avons défini en [II, 3] pour certaines QF-variétés, la QF-variété tangente.

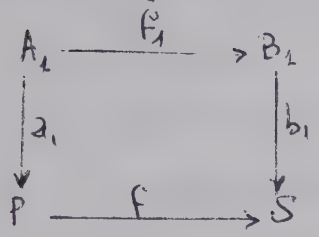
Soit f: P ⟶ S un QF-morphisme. Si S est régulière et f QF-submersif, on sait [III, 4, prop. 15, cor. 1] que tout relèvement $\bar{f}$: A ⟶ B de f (où (A,a,P) , (B,b,S) sont des atlas étales respectifs de P et S) est une submersion et induit [III, 2, prop. 9] un foncteur $\bar{\bar{f}}$ de H(A) vers H(B). Il est alors facile de vérifier que si TP et TS existent, il existe une QF-submersion Tf : TP ⟶ TS et appelé QF-morphisme tangent de f tel que le diagramme ci-dessous commute dans $\mathcal{QF}$:



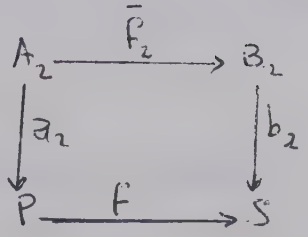
On peut encore définir le QF-morphisme tangent dans le cadre plus général suivant, qui contient comme cas particulier les QF-submersions dont le but est une QF-variété régulière:

Soit $f : P \longrightarrow S$ un QF-morphisme. Si

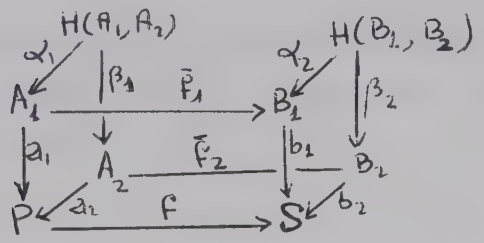
(1)



et (2)



sont deux atlas étales de f, on a, avec les notations de II,3,b , le diagramme commutatif suivant dans $\mathcal{C}^\infty$:



Définition 9'

Les deux atlas étales (1) et (2) de f sont dits compatibles, si pour tout $z \in H(A_1, A_2)$, il existe un voisinage ouvert U de z et une application différentiable $h : U \longrightarrow H(B_1, B_2)$ tels que $\alpha_2 h = \bar{f}_1(\alpha_1|_U)$ et $\beta_2 h = \bar{f}_2(\beta_1|_U)$.

La relation de compatibilité entre atlas étales d'un QF-morphisme est symétrique et transitive. Mais en général elle n'est pas reflexive comme on le verra sur un exemple.

Définition 10

On dira qu'un QF-morphisme est holonome si ses atlas étales sont deux à deux compatibles .

Exemples de QF-morphismes holonomes

1°) Si S est une Q-variété, tout QF-morphisme de but S est holonome : avec les notations de la définition 9' et d'aprés [II, 3, th. 4] , $H(B_1,B_2)$ s'identifie à une sous-variété immergée de $B_1 \times B_2$, d'où une application différentiable globale de $H(A_1,A_2)$ dans $H(B_1,B_2)$ satisfaisant à la définition 9'.

2°) Si S est régulière, toute QF-submersion de but S est holonome (cela résulte de [III, prop. 15, cor. 1] et de [III, prop.9]).

Exemples de QF-morphismes non holonomes

1°) Si S est une QF-variété non régulière, id_S est un QF-morphisme non holonome car chaque atlas étale de S admet un germe de quasi-holonomie non inversible.

2°) L'immersion $\mathbb{R} : \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $t \longrightarrow (0,t)$ induit une QF-immersion de la QF-variété $\mathbb{R}_+$ [II, 1, b, 4°] dans la QF-variété de l'exemple 6°) de [II, 1,b] et cette QF-immersion n'est pas holonome car l'atlas étale ainsi obtenu n'est pas compatible avec lui-même, comme on le voit en se plaçant en 0 dans $\mathbb{R}$.

4 - Quelques autres sous-catégories de $\mathcal{QF}$ et produits fibrés dans $\mathcal{QF}$.

a) QF-immersion stricte, bien stricte et QF-plongement

Soit f : P $\longrightarrow$ S un QF-morphisme. Nous avons établi dans le corollaire 1 de la proposition 4 que quel que soit l'atlas étale (B, b, S) de S, il existait un atlas surcartésien [III, 1, df 4] de f, soit

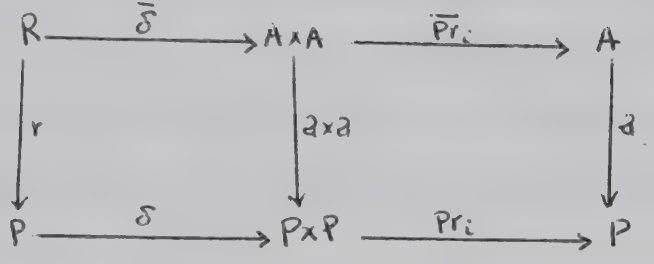
(1)
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\tilde{f}} & B \\ \downarrow a & & \downarrow b \\ P & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

L'exemple qui suit montre qu'en général on ne peut trouver un atlas tel que l'application $A \longrightarrow P \underset{S}{\times} B$ soit bijective pour (B, b, S) donné, autrement dit que le carré (1) ne pourra être choisi ensemblistement cartésien.

Considérons une QF-variété régulière P, et un atlas étale (A, a, P) de P. Alors [III, 3, prop. 13], P x P est une QF-variété régulière d'atlas (A x A, a x a, P x P). Supposons que l'application diagonale δ : P $\longrightarrow$ P x P (qui est un QF-morphisme [III, 2, exemple 3]) admette pour atlas étale le carré

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\tilde{\delta}} & A \times A \\ \downarrow r & & \downarrow a \times a \\ P & \xrightarrow{\delta} & P \times P \end{array}$$

où $R = P \times_{P \times P} (A \times A) \equiv P \times_{P} A$. Alors le diagramme suivant est commutatif :



et $pr_i \, \delta = id_P$. Par suite $\overline{pr}_i \, \bar{\delta}$: R ⟶ A est un relèvement du QF-étalement id_P. D'après le corollaire 2 de la proposition 15, $\overline{pr}_i \, \bar{\delta}$ est un étalement car P est régulière. En appliquant alors la condition $(QF)_3$ [II, 3, df 10], au couple de submersions $(\overline{pr}_1 \, \bar{\delta} \, , \overline{pr}_2 \, \bar{\delta})$ de R dans A, on en déduit une unique submersion k : R ⟶ H(A) qui commute avec les projections dans A. D'autre part d'après la condition $(QF)_1$, l'application (β, α) : H(A) ⟶ $A \underset{S}{\times} A$ est surjective. Comme (β, α) k = id_R, on en déduit que R s'identifie nécessairement à H(A), ce qui est impossible si les groupes d'holonomie de P ne sont pas nuls.

Il résultera alors du corollaire 1 du théorème 1, que δ n'admet aucun atlas ensemblistement cartésien.

Ce qui précède justifie donc la définition suivante :

Définition 11

L'atlas étale (1) du QF-morphisme f sera dit cartésien si $\mathcal{U} = P \underset{S}{\times} P$.

Soit $f : Q \longrightarrow S$ une QF-immersion.

Définition 12

f est une QF-immersion stricte si pour toute QF-variété P, pour toute application $g : P \longrightarrow Q$, fg est un QF-morphisme si et seulement si g en est un.

Définition 13

f est une QF-immersion bien stricte s'il admet un atlas cartésien dont le relèvement correspondant est une immersion stricte [I, 2, df 8]

Définition 14

f est un QF-plongement s'il admet un atlas cartésien dont le relèvement correspondant est un plongement.

Il est évident qu'un QF-plongement est une QF-immersion bien stricte.

Exemples 7

1°) Pour toute QF-variété P, l'application identique de P est un QF-plongement, donc une QF-immersion bien stricte.

2°) Par identification de la catégorie $\mathcal{D}$ (respt. $\mathcal{Q}$) des applications différentiables (respt. des $\mathcal{D}$-morphismes) à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{QF}$, on a

(i) Les immersions strictes et les Q-immersions strictes [I, 4, c] sont des QF-immersions strictes et bien strictes.

(ii) Les plongements sont des QF-plongements.

3°) L'application diagonale décrite ci-dessus est une QF-immersion stricte (non bien stricte en général comme on l'a vu).

4°) Si P est une QF-variété, x un point de P, l'injection canonique de $\{x\}$ dans P est une QF-immersion bien stricte : pour tout atlas étale (A, a, P) de P, $a^{-1}(x)$ est une sous-variété immergée de P et définit un atlas de $\{x\}$. Cette QF-immersion n'est pas un QF-plongement en général.

5°) L'exemple 1°) (iii) de QF-submersion [III, 2] est un QF-plongement.

Proposition 14

1°) Tout QF-plongement est une QF-immersion bien stricte.

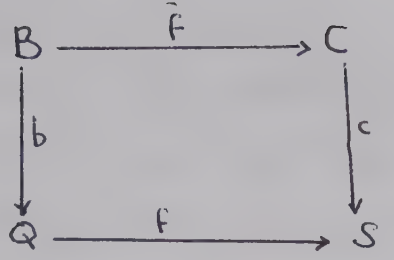
2°) toute QF-immersion bien stricte est stricte.

3°) Toute QF-immersion stricte est injective.

Démonstration

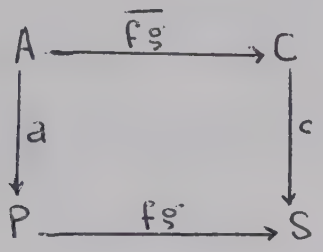
Le 1°) découle des définitions. Démontrons le 2°) ; soient alors f : Q ⟶ P une QF-immersion bien stricte, P une QF-variété et g : P ⟶ Q une application. D'après la définition 13, f admet un atlas cartésien :

(1)



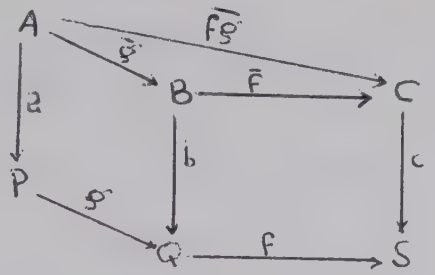
tel que $\bar{f}$ soit une immersion stricte. Si fg est un QF-morphisme, alors [III, 1, prop. 4, corol. 1], fg admet un atlas étale de but (C, c, S), soit :

(2)



Comme $fg\,a = c\,\overline{fg}$ et que le carré (1) est ensemblistement cartésien, il existe une unique application $\bar{g} : A \longrightarrow B$ tel que le diagramme ci-après commute ensemblistement :

(3)



or $\bar{f}\bar{g} = \overline{fg}$ est différentiable et $\bar{f}$ est une immersion stricte, donc $\bar{g}$ est différentiable, et g est un QF-morphisme.

Démontrons le 3°) (en nous inspirant de la démons-

tration du b) de la proposition 6 de [I, 2] . Soient $f : P \longrightarrow S$ une QF-immersion stricte, x_1 et x_2 deux points de P tels que $f(x_1) = f(x_2) = y$; soit $d \in \mathbb{R}$ et définissons l'application g de $\mathbb{R}$ dans P par : $g(t) = x_1$ si $t < d$, $g(t) = x_2$ si $t \geqslant d$. Alors fg est une application constante de P dans S, donc un QF-morphisme. Considérons un atlas étale de f :

(4)

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\bar{f}} & C \\ {\scriptstyle b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ P & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

supposons que $g : \mathbb{R} \longrightarrow P$ soit un QF-morphisme ; alors il admet un atlas étale de but (B, b, P), soit :

(5)

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\bar{g}} & B \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & P \end{array}$$

où a est un étalement ; d'où le diagramme commutatif suivant de QF-morphismes :

(6)

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\bar{g}} & B & \xrightarrow{\bar{f}} & C \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & P & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

Posons :

$$E_1 = \{ t \in \mathbb{R} , \text{ tel que } t < d \}$$

$$E_2 = \{ t \in \mathbb{R} , \text{ tel que } t > d \}$$

$a^{-1}(E_1)$ et $a^{-1}(E_2)$ sont des ouverts de A. La restriction de $\bar{g}$ sur $a^{-1}(E_i)$ est à valeurs dans $b^{-1}(x_i)$ (i = 1, 2), donc est localement constante (car $b^{-1}(x_i)$ est une sous-variété de B de dimension zéro). Puisque a est un étalement surjectif, il existe $z \in A$, un voisinage ouvert connexe U de z tel que $a(z) = d$ et que $a|_U$ soit un difféomorphisme sur un intervalle ouvert V de d. Comme $V \cap E_1$ et $V \cap E_2$ sont connexes, $U \cap a^{-1}(E_1) = a|_U^{-1}(V \cap E_1) = U_1$ et $U \cap a^{-1}(E_2) = a|_U^{-1}(V \cap E_2) = U_2$ sont des ouverts connexes respectifs de $a^{-1}(E_1)$ et de $a^{-1}(E_2)$. Donc $\bar{g}|_{U_i}$ est constante; soit λ_i sa valeur (i = 1, 2) ; d'après la commutativité du diagramme (5) et la définition de g, on doit avoir nécessairement $\bar{g}(z) = \lambda_2$. Si alors $x_1 \neq x_2$, nous aurons en définitive construit un voisinage ouvert U de z tel que $\bar{g}|_U$ ne prenne que deux valeurs distinctes λ_1 et λ_2 ; donc $\bar{g}$ n'est pas différentiable en z, ce qui est absurde car $\bar{g}$ est un relèvement du QF-morphisme g (donc est une application différentiable). Par suite g ne serait pas un QF-morphisme ; ceci contredit l'hypothèse que f est une QF-immersion stricte.

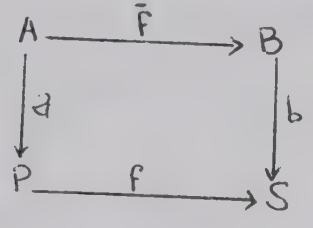
Proposition 15

Soit S une Q-variété, f : P ⟶ S une QF-immersion bien stricte. Alors P est une Q-variété et f une Q-immersion stricte [I,4,c]. Si de plus S est une variété, alors P est une variété et f une immersion stricte.

Démonstration

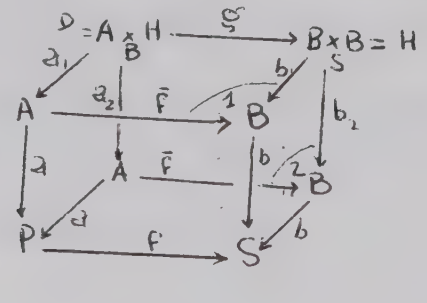
Considérons un atlas cartésien de f

(I)



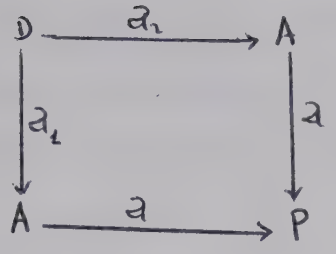
où $\bar{f}$ est une immersion stricte. Nous avons le diagramme ensemblistement commutatif suivant dont toutes les faces sont cartésiennes (ensemblistement):

(II)



S étant une Q-variété, (B, b, S) est un Q-atlas [II, 2, prop. 7], $H = B \underset{S}{\times} B$ une sous-variété immergée de B x B, b_1 et b_2 des étalements [BA]. Pour montrer que P est une Q-variété, il suffit (et il faut) que le carré

(III)

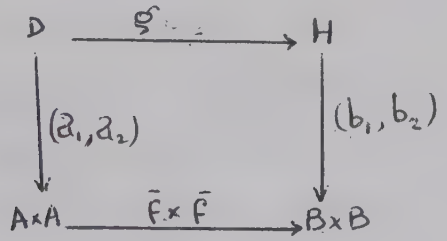


soit un Q-carré de Godement [II, 3, th. 2]. Les carrés 1 et 2 du diagramme (II) sont aussi cartésiens dans la catégorie $\mathcal{D}$ des applications différentiables ; on en déduit que :

- a_1 et a_2 sont des étalements
- g est une immersion stricte car $\bar{f}$ est une immersion stricte [I, prop. 5].

Il reste donc seulement à montrer que l'application (a_1, a_2) : $D \longrightarrow A \times A$ est une immersion stricte ; on a le diagramme ensemblistement commutatif suivant :

(IV)



duquel on déduit que (a_1, a_2) est une immersion stricte, car $(b_1, b_2)\, g = (\bar{f} \times \bar{f})$ est une immersion stricte. Donc P est une Q-variété et il est évident que f est une Q-immersion stricte.

Supposons maintenant que S soit une variété ; S est donc une Q-variété ; P est, d'après ce qui précède une Q-variété, et f une Q-immersion (stricte). D'après [BA] page 239, P est une variété.

b) Produit fibré et sous-catégorie des QF-plongements et des QF-immersions bien strictes

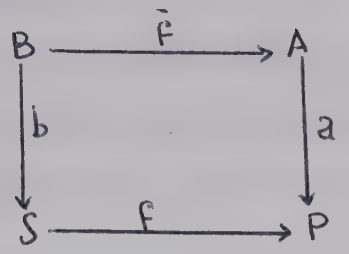
Etant donnés deux QF-morphismes, $f : P_1 \longrightarrow P$ et $g : P_2 \longrightarrow P$, on se propose de montrer que dans certains cas $P_1 \underset{P}{\times} P_2$ (produit fibré ensembliste) possède une structure de QF-variété qui en fait un produit fibré dans la catégorie $\mathfrak{QF}$.

Lemme

Soient : P une QF-variété, (A, a, P) un atlas étale de P, B une sous-variété immergée de A saturée pour la relation d'équivalence définie sur A par l'application a. Alors a(B) = S possède une structure de QF-variété d'atlas étale $(B, a|_B, S)$ et telle que l'injection canonique de S dans P soit une QF-immersion bien stricte. Si de plus B est une sous-variété plongée de A, alors S est QF-plongée dans P.

Démonstration

D'après les hypothèses, nous avons le diagramme ensemblistement cartésien suivant :



dans lequel f et $\bar{f}$ sont les injections canoniques et $b = a|_B$. Montrons que (B, b, S) est un atlas étale de S en vérifiant les propriétés (A_1) et (A_2) de la définition 2 de [II, 1]. Nous identifions B et $\bar{f}$ (B) (respt. S et f(S)) dans la démonstration.

Vérifions (A_1) : si $s \in S$, alors $a^{-1}(s) = b^{-1}(s)$ (car B est saturée) est une sous-variété immergée de A contenue dans B ; donc $a^{-1}(s)$ est une sous-variété immergée de B (transitivité de sous-variétés immergées) ; d'autre part $a^{-1}(s)$ étant de dimension zéro, est un ouvert du feuilletage discret de B, d'où (A_1).

(A_2) : soit $(x, y) \in B \times B$ tel que $b(x) = b(y)$. Alors $a(x) = a(y)$; donc il existe un isomorphisme transverse de A [II, 1, a), df 2] σ : U $\longrightarrow$ V tel que $(x, y) \in U \times V$, $\sigma(x) = y$ et $a\sigma = a$; $U \cap B$ est un ouvert de B ; posons $\mu = \sigma|_{U \cap B}$; μ est une application différentiable de $U \cap B$ dans V. B étant saturée et comme $a\sigma = a$, μ est à valeurs dans B ; donc B étant une sous-variété immergée, μ est une application différentiable de $U \cap B$ dans B, et plus précisement dans l'ouvert $V \cap B$ de B. Par un raisonnement analogue,

la restriction de σ^{-1} sur $V \cap B$ est une application différentiable de $V \cap B$ dans $U \cap B$. μ induit donc un difféomorphisme de $U \cap B$ sur $V \cap B$. De la relation $a\sigma = a$, on déduit que $b\mu = b$, ce qui montre que μ est un isomorphisme transverse pour (B, b, S); d'où (A_2).

Le reste de la démonstration est évident car il découle directement des définitions 13 et 14 .

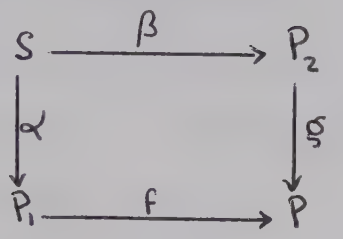
Remarque 8

Le carré ci-dessus est $\mathcal{QF}$-cartésien : en effet soient $h_1 : T \longrightarrow S$ et $h_2 : T \longrightarrow A$ deux QF-morphismes tels que $fh_1 = ah_2$; alors il existe une unique application $h : T \longrightarrow B$ (car le carré est ensemblistement cartésien) tel que $bh = h_1$ et $\bar{f}h = h_2$. Or $\bar{f}$ est une immersion stricte, donc une QF-immersion bien stricte [a), exemple 2°)], donc h est un QF-morphisme.

Théorème 1

Soient $f : P_1 \longrightarrow P$ une QF-immersion bien stricte et $g : P_2 \longrightarrow P$ une QF-submersion. Alors il existe sur $P_1 \underset{P}{\times} P_2 = S$ une structure unique de QF-variété telle que :

1°) Le carré



est un carré $\mathfrak{QF}$ —cartésien (c'est-à-dire cartésien dans $\mathfrak{QF}$).

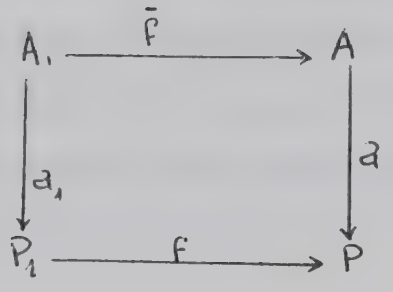
2°) α est une QF-submersion et β une QF-immersion bien stricte.

3°) L'application $(\alpha, \beta) : S \longrightarrow P_1 \times P_2$ est un QF-plongement.

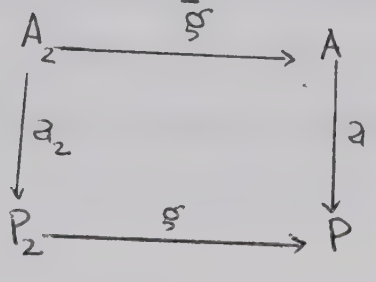
Si de plus f est un QF-plongement, alors il en est de même de β.

Démonstration

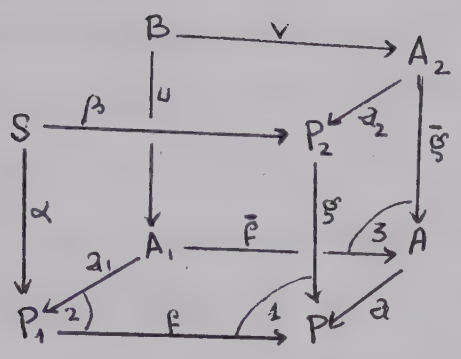
D'après la définition 13, f admet un atlas cartésien [Ehr 11] :



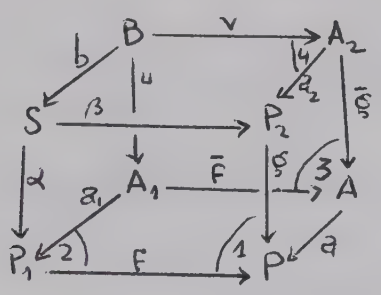
où $\bar{f}$ une immersion stricte. D'autre part la QF-submersion g admet un atlas adapté [III, 2, df 6] de but l'atlas étale (A, a, P) [prop 7], soit



Nous avons le diagramme ensemblistement commutatif suivant, où $B = A_1 \underset{A}{\times} A_2$, u et v les projections canoniques :



Le carré 1 étant cartésien dans la catégorie $\mathfrak{E}$ des applications, il existe une unique application b : B $\longrightarrow$ S telle que le diagramme suivant soit encore commutatif dans $\mathfrak{E}$:



Les carrés 1, 2 et 3 étant cartésiens dans $\mathfrak{E}$, il en est de même du carré 4. Le carré 3 est aussi cartésien dans $\mathfrak{D}$, donc [I, 2, prop. 5], v est une immersion stricte. D'après le lemme, S possède une structure de QF-variété d'atlas étale (B, b, S). Il est évident que α (respt. β) est une QF-submersion (respt. QF-immersion bien stricte) car il admet pour relèvement la submersion u (l'immersion stricte v) et que le carré 4 est cartésien dans $\mathfrak{E}$.

Vérifions la propriété universelle dans $\mathcal{A}$ pour le carré 1. Soient alors $h_1 : T \longrightarrow P_1$ et $h_2 \longrightarrow P_2$ deux QF-morphismes tels que $fh_1 = gh_2$. Le diagramme 1 étant cartésien dans $\mathcal{E}$, il existe une unique application $h : T \longrightarrow S$ telle que $\alpha h = h_1$ et $\beta h = h_2$; or β étant une QF-immersion bien stricte, est stricte [prop. 14], et h est en fait un QF-morphisme. L'unicité de la factorisation est évidente car elle coïncide nécessairement avec la factorisation ensembliste.

L'injection canonique $(\alpha, \beta) : S \longrightarrow P_1 \times P_2$ est un QF-plongement, car le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_1 \times_A A_2 & \xrightarrow{(u,v)} & A_1 \times A_2 \\ \downarrow b & & \downarrow a_1 \times a_1 \\ S & \xrightarrow{(\alpha,\beta)} & P_1 \times P_2 \end{array}$$

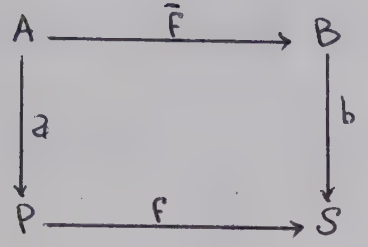
est ensemblistement cartésien et (u, v) un plongement.

Si f est un QF-plongement, il est clair qu'il en est de même de β.

Corollaire 1

Soit $f : P \longrightarrow S$ une QF-immersion bien stricte (respt. un QF-plongement). Alors pour tout atlas étale

(B, b, S) de S, il existe un atlas cartésien de f



tel que $\bar{f}$ soit une immersion stricte (respt. un plongement).

Démonstration

D'après le théorème 1, $P \underset{S}{\times} B = A$ possède une structure de QF-variété telle que $\bar{f} : P \underset{S}{\times} B \longrightarrow B$ soit une QF-immersion bien stricte (respt. un QF-plongement) ; donc [prop 15], A est une variété et $\bar{f}$ une immersion stricte (respt. un plongement). Par suite (A, pr_1, P) est un atlas étale de P car $(\bar{f}(A), b|_{\bar{f}(A)}, f(P))$ est un atlas étale de f (P) [d'après le lemme].

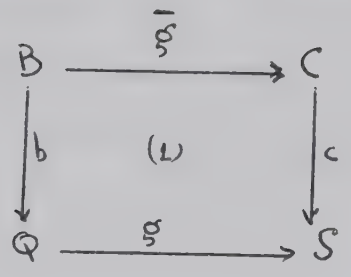
Corollaire 2

Soient $f : P \longrightarrow Q$ et $g : Q \longrightarrow S$ deux QF-immersions bien strictes (respt. deux QF-plongements). Alors gf est une QF-immersion bien stricte (respt. un QF-plongement.

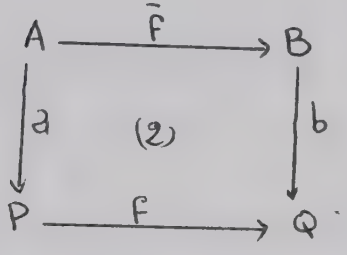
Démonstration

Supposons que f et g soient des QF-immersions bien strictes. Considérons d'abord un atlas carté -

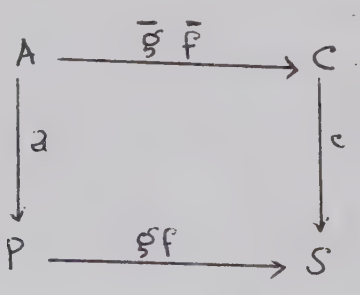
sien de g :



D'après le corollaire 1,f admet un atlas cartésien de but l'atlas étale (B, b, Q), soit :



$\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont nécessairement des immersions strictes. Par composition des carrés cartésiens (1) et (2), on obtient le carré cartésien suivant qui est ensemblistement cartésien :



donc gf est une QF-immersion bien stricte car $\bar{g}$ $\bar{f}$ est une immersion stricte.

Les QF-immersions strictes (resp. QF-immersions bien strictes, QF-plongements) forment donc une sous-catégorie $\mathcal{QFI}'$ (resp. $\mathcal{QFI}''$, $\mathcal{QFI}'''$) de $\mathcal{QFI}$ [III, 2, c]. D'après la proposition 14, on a les inclusions de catégories:

$$\mathcal{QFI}''' \hookrightarrow \mathcal{QFI}'' \hookrightarrow \mathcal{QFI}' \hookrightarrow \mathcal{QFI} .$$

Corollaire 3

Soit P une QF-variété régulière. Alors P est une Q-variété (resp. une variété) si et seulement si l'application diagonale $\delta : P \longrightarrow P \times P$ est une QF-immersion bien stricte (resp. un QF-plongement).

Démonstration

Soit (A, a, P) un atlas étale de P ; posons $R = A \underset{P}{\times} A$, $r = a(pr_2) : R \longrightarrow P$, et désignons par $\bar{\delta}$ l'injection canonique de R dans A x A. Si P est une Q-variété (resp. une variété), alors $\bar{\delta}$ est une immersion stricte (resp. un plongement) et les $pr_i : R \longrightarrow A$, i = 1, 2 des étales [BA] ou [I.]. Donc (R, r, P) est un atlas étale de P [II,4,prop.3], et le diagramme suivant est alors un [illegible]:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\bar{\delta}} & A \times A \\ \downarrow r & & \downarrow a \times a \\ P & \xrightarrow{\delta} & P \times P \end{array}$$

donc δ est une QF-immersion bien stricte (resp. un QF-plongement). La réciproque découle de l'exemple décrit au début du § a).

5 - Produit pseudo-fibré et pseudo-théorème de Godement dans la catégorie $\mathfrak{QF}$

Rappelons que pour tout atlas (A, a, P) d'une QF-variété P, H (A) désignera son groupoïde d'holonomie [II , 3, df 14].

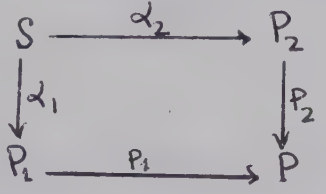
a) Produit pseudo-fibré des QF-submersions

Les QF-immersions et les QF-submersions nous permettent d'introduire dans la catégorie $\mathfrak{QF}$, une notion qui prolonge dans $\mathfrak{QF}$, celle de QF-carrés [II, 3, df 10] . Moyennant une condition supplémentaire, nous montrerons (§ b) qu'elle y joue un rôle analogue.

Définition 16

Soient S, P_1 et P_2 des QF-variétés $p_1 : P_1 \longrightarrow P$ et $p_2 : P_2 \longrightarrow P$ deux surjections. On dira que le carré ensemblistement commutatif

(1)



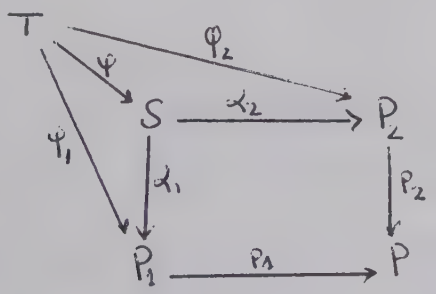
est un pseudo-carré de Godement si les conditions suivantes sont vérifiées :

$(PC)_o$: α_1 et α_2 sont des QF-surmersions

$(PC)_1$: l'application $(\alpha_1, \alpha_2) : S \longrightarrow P_1 \times P_2$ est surjective sur $P_1 \underset{P}{\times} P_2$.

$(PC)_2$: l'application $(\alpha_1, \alpha_2) : S \longrightarrow P_1 \times P_2$ est une QF-immersion.

$(PC)_3$: Pour tout couple de QF-submersions $\varphi_1 : T \longrightarrow P_1$ et $\varphi_2 : T \longrightarrow P_2$ tel que $\varphi_1 p_1 = \varphi_2 p_2$, il existe un unique QF-morphisme $\varphi : T \longrightarrow S$ rendant commutatif dans $\mathcal{C}$ le diagramme



$(PC)_4$: Si A est une variété, $g_1 : A \longrightarrow P_1$ et $g_2 : A \longrightarrow P_2$ un couple de QF-morphismes tel que $p_1 g_1 = p_2 g_2 = ctc$, alors pour tout $z \in A$, il existe un voisinage ouvert Ω de z et un QF-morphisme $g : \Omega \longrightarrow S$ tels que $\alpha_1 g = g_1|_\Omega$ et $\alpha_2 g = g_2|_\Omega$.

Remarques 9

1°) La condition $(PC)_3$ implique que la donnée de p_1 et p_2 détermine S à un QF-isomorphisme près.

2°) La condition $(PC)_1$ implique que la donnée de α_1, α_2 et S détermine P à une bijection près.

3°) Dans la condition $(PC)_4$, l'unicité de la factorisation g n'est pas imposée.

Définition 17

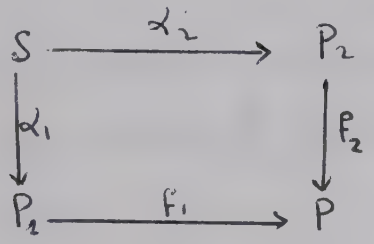
Si dans la définition précédente P est une QF-variété, p_1 et p_2 QF-surmersives, alors S sera appelé produit pseudo-fibré de p_1 et p_2 (au-dessus de P) ; on dira dans ce cas que le carré (1) est pseudo-cartésien dans la catégorie $\mathcal{QF}$.

Exemple

En identifiant la catégorie $\mathcal{Q}$ des Q-morphismes à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{QF}$ [III, 1, b], tout Q-carré et en particulier tout carré de Godement [II, 1, df], se relève, d'après le théorème de Godement - Barre [III, 3, th4] en un carré $\mathcal{QF}$ —cartésien et pseudo-cartésien.

Théorème 2

Soient P_1 et P_2 deux QF-variétés régulières [III,3 , df.8], $f_1 : P_1 \longrightarrow P$ et $f_2 : P_2 \longrightarrow P$ deux QF-surmersions. Alors il existe dans $\mathcal{QF}$ un carré pseudo-cartésien



Si de plus P est régulière, alors S est régulière.

Démonstration

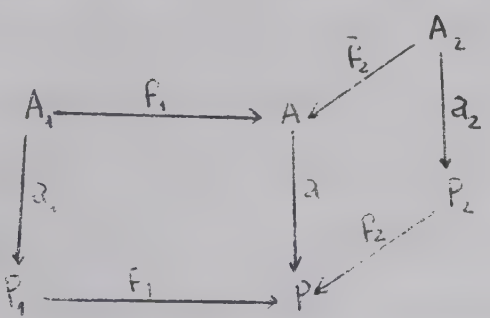
Elle se fait en plusieurs étapes :

1°) Construction de la QF-variété S

Soit (, , P) un atlas étale de P

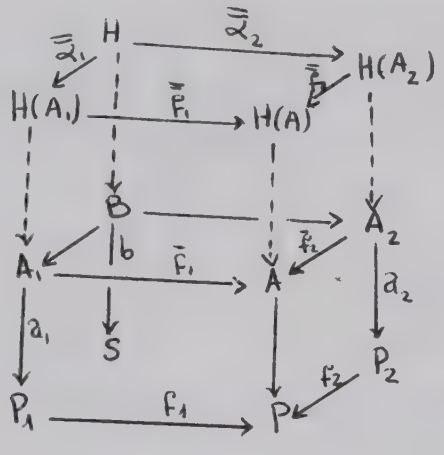
D'après la proposition 6 de [III, 2], on peut supposer que f_1 et f_2 admettent des atlas surcartésiens et adaptés de but (A, a, P), de source respectives (A_1, a_1, P_1) et (A_2, a_2, P_2). d'où le diagramme

(1)



avec $\bar{f}_1$ et $\bar{f}_2$ surmersives. D'après la proposition 8 de [III, 2], $\bar{f}_i$, i = 1, 2, induit un foncteur submersif différentiable $\bar{\bar{f}}_i$ de $H(A_i)$ vers $H(A)$. Alors $H = H(A_1) \underset{H(A)}{x} H(A_2)$ est un groupoïde différentiable étale [I, 4, c] de base $B = A_1 \underset{A}{x} A_2$. Notons S le quotient d'intransitivité de H [I, 4, df 11], b la projection canonique de B sur S. On a le diagramme commutatif dans $\mathcal{C}$ suivant :

(II)



où les flèches en pointillées sont toutes soit des applications **sources** soit des applications but des groupoïdes correspondants.

Définissons, pour i = 1, 2, une application (ensembliste) α_i de S dans P_i : soient $x \in S$, $(x_1, x_2) \in B$ tel que $b(x_1, x_2) = x$; alors $a_1(x_1)$ (resp. $a_2(x_2)$) est indépendant de (x_1, x_2) : en effet si $(x'_1, x'_2) \in B$ est tel que $b(x'_1, x'_2) = b(x_1, x_2) = x$, alors, comme S est le quotient d'intransitivité de H, il existe $z \in H$ tel que

$\alpha_H(z) = (x_1, x'_1)$, $\beta_H(z) = (x_2, x'_2)$. D'après la commutativité du diagramme (II) et la construction de H, on a nécessairement

$$\pi_{H(A_1)} \bar{\alpha}_1(z) = (x_1, x'_1) \text{ et } \pi_{H(A_2)} \bar{\alpha}_2(z) = (x_2, x'_2)$$

donc $a_1(x_1) = a_1(x'_1)$ et $a_2(x_2) = a_2(x_2)$.

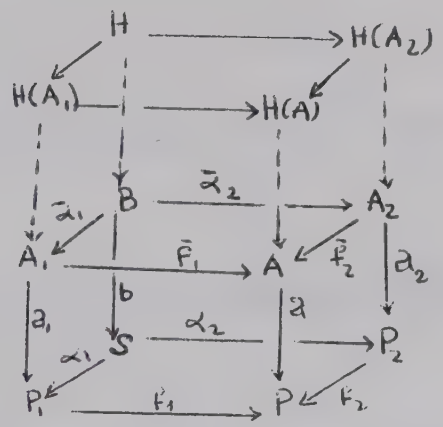
On pose alors

$$\alpha_1(x) = a_1(x_1) \quad \text{et} \quad \alpha_2(x_1) = a_2(x_2).$$

D'après ce qui précède α_1 et α_2 sont bien définis.

Par définition de α_1 et α_2, on a le diagramme ensemblistement commutatif :

(III)



Nous allons maintenant montrer que S possède une structure de QF-variété d'atlas étale (B, b, S). Il suffit [II, 3, th 1], de montrer que (H, B, S, ; α_{II}, β_{II}, b)

est une QF-fourche [II, 3, df 11] :

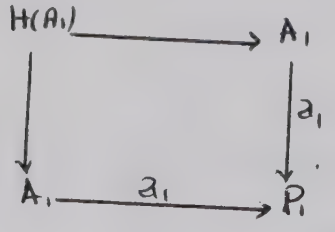
- $(QF)_0$ est évident par construction de H .

- $(QF)_1$ se vérifie facilement car $B \underset{S}{\times} B$ est tout simplement le graphe de la relation d'équivalence d'intransitivité.

- $(QF)_2$ est trivial car H est un groupoïde différentiable étale .

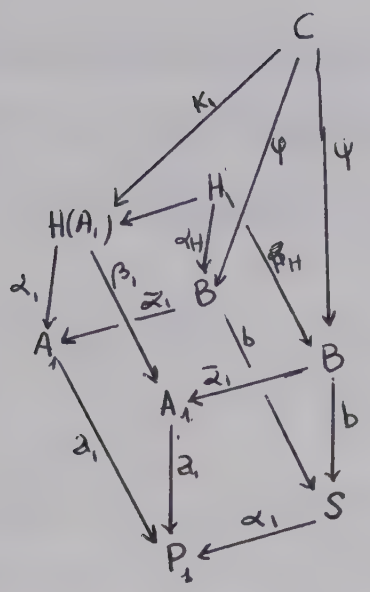
- vérifions $(QF)_3$: soient $\varphi : C \longrightarrow B$ et $\psi : C \longrightarrow B$ deux submersions vérifiant l'égalité $b\varphi = b\psi$. Du diagramme (III) on déduit les égalités $\alpha_1 b\varphi = a_1 \bar{\alpha}_1 \varphi = \alpha_1 b\psi = a_1 \bar{\alpha}_1 \psi : C \longrightarrow P_1$. On peut alors appliquer $(QF)_3$ au QF -carré

(IV)



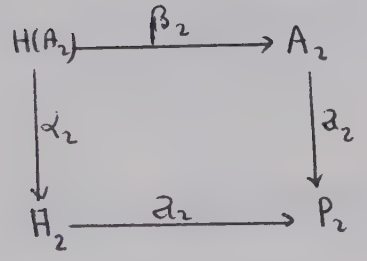
et au couple de submersions $\bar{f}_1 \varphi$ et $\bar{f}_1 \psi$ de C dans A_1 ; d'où l'existence et l'unicité d'une application différentiable $k_1 : C \longrightarrow H(A_1)$ rendant commutatif le diagramme :

(V)



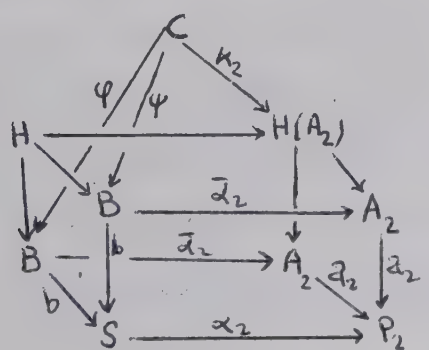
Par un raisonnement symétrique appliqué au QF-carré

(VI)

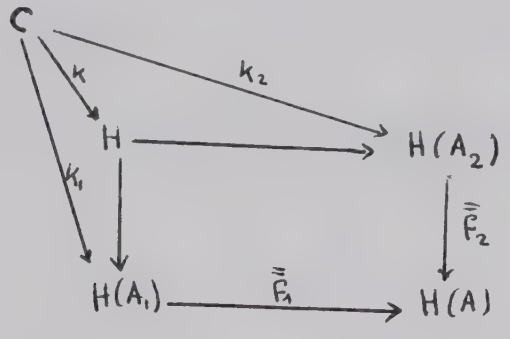


on déduit une unique application différentiable $k_2 : C \longrightarrow H(A_2)$ rendant commutatif le diagramme :

(VII)



D'autre part le couple de submersions $\bar{f}_1 \bar{\alpha}_1 \varphi = \bar{f}_2 \bar{\alpha}_2 \varphi$ et $\bar{f}_1 \bar{\alpha}_1 \psi = \bar{f}_2 \bar{\alpha}_2 \psi$ de C dans A vérifient les hypothèses de $(QF)_3$ dans la QF-fourche $H(A) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{a} P$ et admet pour factorisation (à travers H(A)) $\bar{\bar{f}}_1 k_1$ et $\bar{\bar{f}}_2 k_2$; donc, par unicité, $\bar{\bar{f}}_1 k_1 = \bar{\bar{f}}_2 k_2$. D'après les propriétés du carré cartésien des groupoïdes, on en déduit une unique application différentiable $k : C \longrightarrow H$ tel que le diagramme suivant soit commutatif dans $\mathfrak{D}$:



On déduit en définitive des diagrammes (V), (VII) et (VIII) qu'on a bien $\alpha_H k = \varphi$ et $\beta_H k = \psi$.

- Vérifions $(QF)_4$: Considérons maintenant deux applications différentiables φ et ψ de C dans B telles que $b\varphi = b\psi = cte$; il suffit [II, 3, rem.7] de montrer que φ et ψ sont localement constantes. En nous servant de la commutativité du diagramme (V), on déduit que

$$\alpha_1 b\varphi = a_1 \bar{\alpha}_1 \varphi = a_1 \bar{\alpha}_1 \psi = \alpha_1 b\psi = cte$$

Donc en appliquant $(QF)_4$ à la QF-fourche (IV) et au couple d'applications différentiables $\bar{\alpha}_1 \varphi$ et $\bar{\alpha}_1 \psi$, on en déduit que $\bar{\alpha}_1 \varphi$ et $\bar{\alpha}_1 \psi$ sont localement constantes.

Par un raisonnement analogue, en utilisant les diagrammes (VI) et (VII), on déduit que $\bar{\alpha}_2 \varphi$ et $\bar{\alpha}_2 \psi$ sont localement constantes.

Or φ et ψ sont à valeurs dans le produit fibré $B = A_1 \underset{A}{\times} A_2$, et telles que les différentes projections dans A_1 et A_2 soient localement constantes ; donc φ et ψ sont localement constantes.

Nous pouvons déduire donc du théorème 1 du chapitre II, que S est une QF-variété d'atlas étale (B, b, S).

2°) Montrons que le carré commutatif dans $\mathcal{QF}$

(IX)

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha_2} & P_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ P_1 & \xrightarrow{f_1} & P \end{array}$$

est pseudo-cartésien :

-$(PC)_o$: $\bar{f}_1$ et $\bar{f}_2$ étant des surmersions, il en est de même des projections canoniques de $B = A_1 \underset{A}{\times} A_2$ (voir diagramme (IV)) ; donc par définition, α_1 et α_2 sont

des QF-submersions, surjectives car $a_1 \bar{\alpha}_1 = \alpha_1 b$ et $a_2 \bar{\alpha}_2 = \alpha_2 b$ le sont.

-$(PC)_1$: montrons que l'application

$S \longrightarrow P_1 \underset{P}{\times} P_2$ est surjective. Soient alors

$(y_1, y_2) \in P_1 \underset{P}{\times} P_2$; A étant un atlas (étale) de P, il existe $x \in A$ tel que $a(x) = f_1(y_1) = f_2(y_2)$. L'atlas $\bar{f}_1$ (respt. $\bar{f}_2$) [III, 1, remarque] étant surcartésien [III, 1, df 4], il existe $x_1 \in A_1$ (respt. $x_2 \in A_2$) tel que $(a_1, \bar{f}_1)(x_1) = (y_1, x)$ (respt. $(a_2, \bar{f}_2)(x_2) = (y_2, x)$) Donc $\bar{f}_1(x_1) = \bar{f}_2(x_2)$ et alors $(x_1, x_2) \in B$. L'élément $b(x_1, x_2)$ de S se projette par (α_1, α_2) sur (y_1, y_2) d'après la commutativité du diagramme (III). D'où $(PC)_1$.

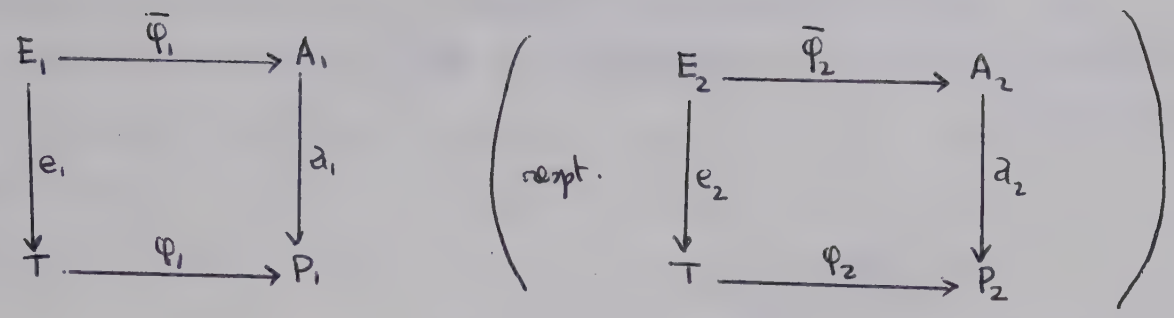
- $(PC)_2$ est trivialement vérifié car $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) : B \longrightarrow A_1 \times A_2$ est une immersion (et même un plongement, relevant $(\alpha_1, \alpha_2) : S \longrightarrow P_1 \times P_2$.

- Vérifions $(PC)_3$: soient $\varphi_1 : T \longrightarrow P_1$ et $\varphi_2 : T \longrightarrow P_2$ deux QF-submersions telles que $f_1 \varphi_1 = f_2 \varphi_2 = \varphi$

(i) <u>constructions préliminaires</u>

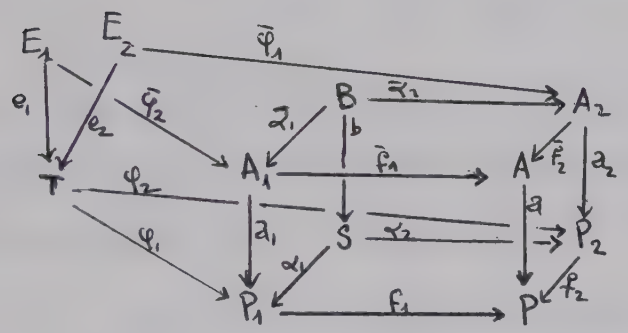
Il suffira de construire φ_1 (resp. φ_2) de la forme :

(X̲)



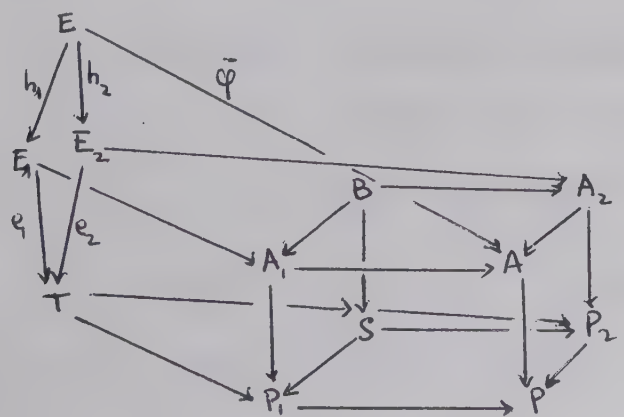
D'où le diagramme commutatif dans $\mathcal{QF}$ suivant :

(X̄I)



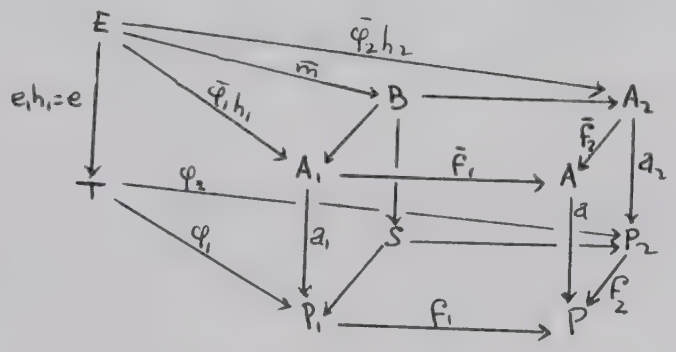
Alors $\bar{f}_1\ \bar{\varphi}_1 : E_1 \longrightarrow A$ et $\bar{f}_2\ \bar{\varphi}_2 : E_2 \longrightarrow A$ sont deux submersion de même but A, relevant φ ; donc [III, 3, prop. 3], elles admettent un majorant $\bar{\varphi} : E \longrightarrow A$; plus précisemment, il existe des étalements $h_1 : E \longrightarrow E_1$ et $h_2 : E \longrightarrow E_2$ **rendant** commutatif dans $\mathcal{QF}$ le diagramme :

(X̄II)



Autrement dit en "omettant" E_1 et E_2 , nous avons le diagramme suivant commutatif dans $\mathfrak{QF}$, ($\bar{m}$ étant justifié ci-dessous) :

XIII



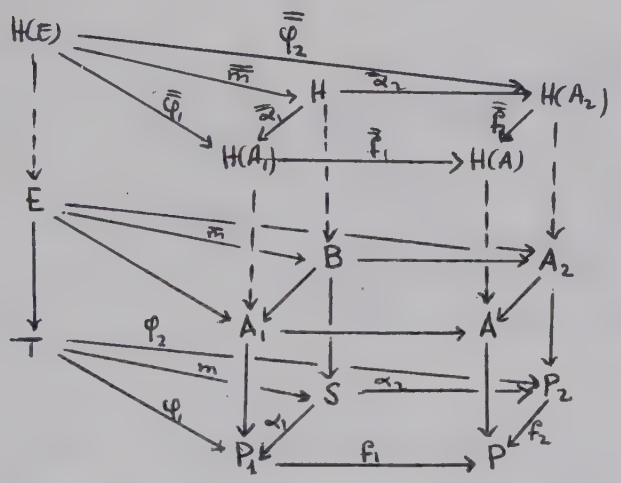
Le carré (B, A_1, A, A_2) étant cartésien par construction, on déduit une unique application différentiable $\bar{m} : E \longrightarrow B$ rendant le diagramme (XIII) encore commutatif.

(ii) Existence de la factorisation

D'après ce qui précède, $\bar{\varphi}_1 h_1 : E \longrightarrow A_1$, (resp. $\bar{\varphi}_2 h_2 : E \longrightarrow A_2$, $\bar{f}_1 \bar{\varphi}_1 h_1 = \bar{f}_2 \varphi_2 h_2 : E \longrightarrow A$) est une submersion relevant la QF-submersion φ_1 (resp. φ_2, $\varphi = f_1 \varphi_1 = f_2 \varphi_2$) , donc [III, 2, prop. 8] , induit un unique foncteur $\bar{\bar{\varphi}}_1$ (resp. $\bar{\bar{\varphi}}_2$, $\bar{\bar{\varphi}}$) de H(E) vers $H(A_1)$ (resp. $H(A_2)$, H(A)). Mais $\bar{\bar{f}}_1 \bar{\bar{\varphi}}_1$ et $\bar{\bar{f}}_2 \bar{\bar{\varphi}}_2$ (voir aussi le diagramme (II)) sont aussi deux foncteurs de H (E) vers H (A) induits par $\bar{f}_1 \bar{\varphi}_1 h_1 = \bar{f}_2 \bar{\varphi}_2 h_2$, donc par unicité $\bar{\bar{\varphi}} = \bar{\bar{f}}_1 \bar{\bar{\varphi}}_1 = \bar{\bar{f}}_2 \bar{\bar{\varphi}}_2$. Le carré (H, $H(A_1)$, H(A), $H(A_2)$) des groupoïdes (voir figure (II)) étant cartésien on en déduit un unique foncteur $\bar{\bar{m}} : H(E) \longrightarrow H$, qui,

compte tenu de la façon dont on a construit S, induit une application $m : T \longrightarrow S$ entre quotients d'intransitivité et rendant commutatif le carré (E, T, S, B). D'après la définition des QF-morphismes, m est bien un QF-morphisme et on a le diagramme suivant qui commute dans $\mathcal{QF}$:

(XIV)



où les flèches non pleines sont toutes soit des projections source, soit des projections but des groupoïdes correspondants.

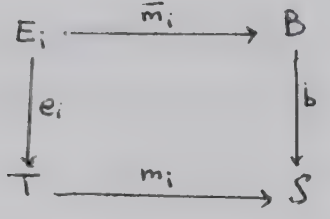
Comme $\bar{\alpha}_1 \bar{m} = \bar{\varphi}_1$ et $\bar{\alpha}_2 \bar{m} = \bar{\varphi}_2$, on a nécessairement $\alpha_1 m = \varphi_1$ et $\alpha_2 m = \varphi_2$.

(iii) Unicité de la factorisation

Supposons qu'il existe deux QF-morphismes m_1 et m_2 de T dans S tels que $\alpha_1 m_1 = \varphi_1 = \alpha_1 m_2$, $\alpha_2 m_1 = \varphi_2 = \alpha_2 m_2$.

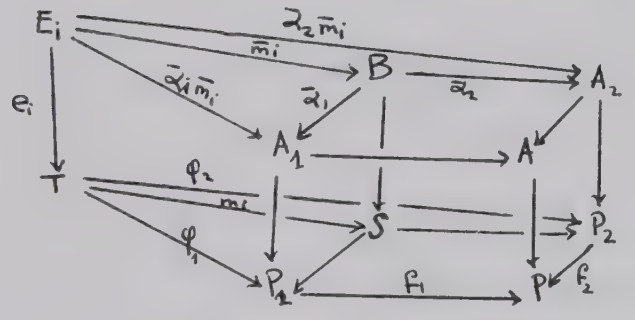
Pour i = 1, 2 soit :

(XV)



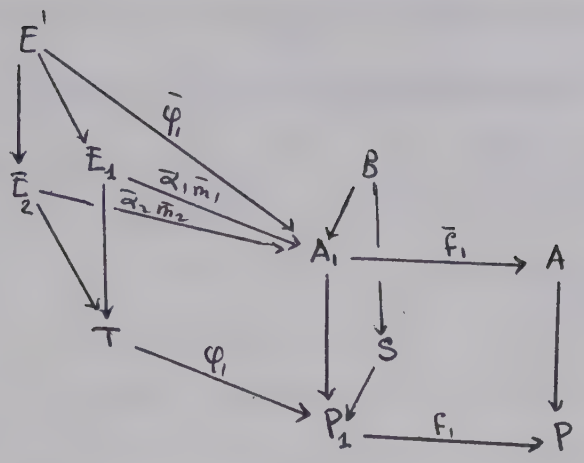
un atlas de m_i ; nous avons alors le diagramme commutatif

(XVI)



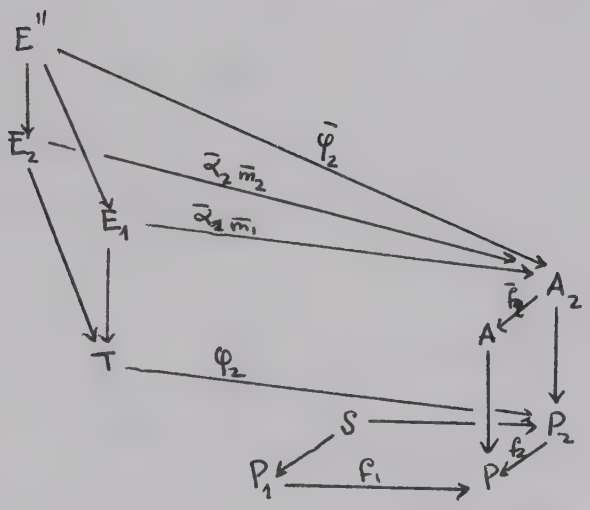
Donc $\bar{\alpha}_1\,\bar{m}_1$ et $\bar{\alpha}_1\,\bar{m}_2$ (respt. $\bar{\alpha}_2\,\bar{m}_1$ et $\bar{\alpha}_2\,\bar{m}_2$) relèvent la QF-submersion φ_1 (respt. φ_2). Les QF-variétés P_1 et P_2 étant régulières, $\bar{\alpha}_1\,\bar{m}_1$, $\bar{\alpha}_1\,\bar{m}_2$, $\bar{\alpha}_2\,\bar{m}_1$ et $\bar{\alpha}_2\,\bar{m}_2$ sont des submersions (prop. 13, corol. 1). Les submersions $\bar{\alpha}_1\,\bar{m}_1 : E_1 \longrightarrow A_1$ et $\bar{\alpha}_1\,\bar{m}_2 : E_2 \longrightarrow A_1$ admettent donc un majorant $\bar{\varphi}_1 : E' \longrightarrow A_1$ (prop. 9). De même les submersions $\bar{\alpha}_2\,\bar{m}_1 : E_1 \longrightarrow A_2$ et $\bar{\alpha}_2\,\bar{m}_2 : E_2 \longrightarrow A_2$ admettent un majorant $\bar{\varphi}_2 : E'' \longrightarrow A_2$. Nous avons donc les diagrammes commutatifs suivants :

(XVII)



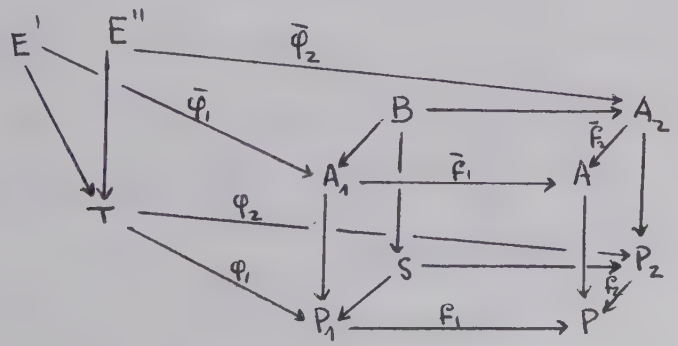
et

(XVIII)



En "combinant" les figures (XVII) et (XVIII) et en omettant E_1 et E_2, nous obtenons le diagramme commutatif suivant dans $\mathfrak{Q}\mathcal{F}$

(XIX)

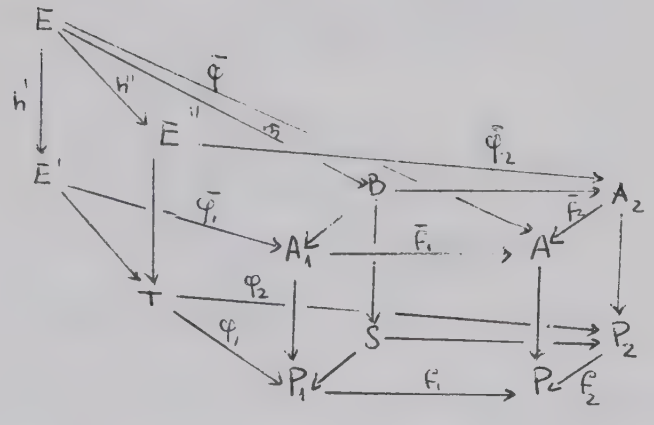


On a donc deux submersions $\bar{f}_1$ $\bar{\varphi}_1 : E' \longrightarrow A$ et $\bar{f}_2$ $\bar{\varphi}_2 : E'' \longrightarrow A$ qui relèvent la QF-submersion $\varphi = f_1 \varphi_1 = f_2 \varphi_2$: elles admettent donc un majorant $\bar{\varphi} : E \longrightarrow A$; autrement dit il existe des étalements $h' : E \longrightarrow E', h'' : E \longrightarrow E''$ tels que :

$$\bar{\varphi}_1 h' = \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_2 h''$$

D'après les propriétés des diagrammes cartésiens, il existe une unique application différentiable $\bar{m} : E \longrightarrow B$ rendant commutatif dans $\mathcal{Q}\mathcal{F}$ le diagramme :

(XX)



Vérifions maintenant que $\bar{m}$ relève m_1 et m_2 : des diagrammes (XVII) (XX) on déduit les égalités :

$(E \longrightarrow A) = (E \longrightarrow E' \longrightarrow A) = (E \longrightarrow E' \longrightarrow E_1 \longrightarrow A)$

$= (E \longrightarrow E' \longrightarrow E_1 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A) = (E \longrightarrow E' \longrightarrow E_2 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A)$

$= (E \longrightarrow E'' \longrightarrow E_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A) = (E \longrightarrow E'' \longrightarrow E_2 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A)$

Le carré (B, A_1, A, A_2) étant cartésien, par unicité de factorisation, on a nécessairement :

$(\bar{m} : E \longrightarrow B) = (E \longrightarrow E' \longrightarrow E_i \xrightarrow{\bar{m}_i} B) = (E \longrightarrow E'' \longrightarrow E_i \xrightarrow{\bar{m}_i} B)$.

Du diagramme (XVl), et des égalités ci-dessus on déduit

$(E \longrightarrow T \xrightarrow{m_i} S) = (E \longrightarrow E' \longrightarrow E_i \longrightarrow T \longrightarrow S)$

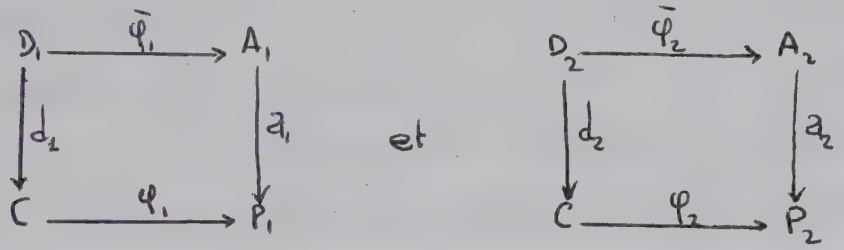
$= (E \longrightarrow E' \longrightarrow E_i \longrightarrow B \longrightarrow S) = (E \xrightarrow{\bar{m}} B \longrightarrow S)$.

Ce qui prouve que $\bar{m}$ relève m_1 et m_2 ; donc [III, 1, prop 3], $m_1 = m_2$. D'où l'unicité.

Vérifions $(PC)_4$

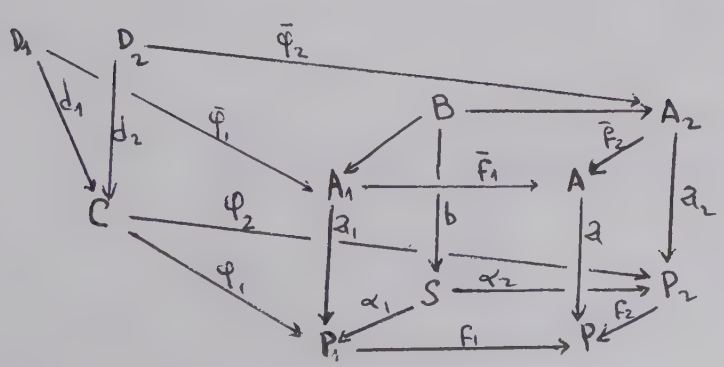
Soient C une variété, $\varphi_1 : C \longrightarrow P_1$ et $\varphi_2 : C \longrightarrow P_2$ deux QF-morphismes tels que $f_1 \varphi_1 = f_2 \varphi_2$; φ_1 et φ_2 admettent des atlas étales respectifs de la forme :

$(X\bar{X}1)$



où d_1 et d_2 sont des étalements. On a alors le diagramme commutatif dans $\mathcal{QF}$ suivant :

$(X\bar{X}II)$

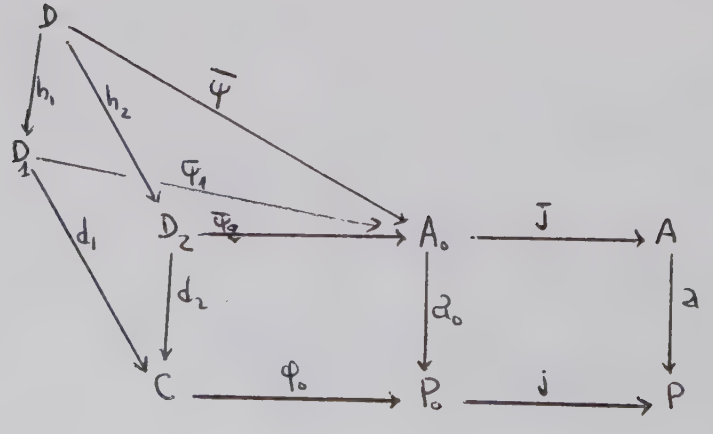


Désignons par P_o l'unique valeur de l'application constante $f_1 \varphi_1 = f_2 \varphi_2 = \psi$, et posons $A_o = a^{-1}(P_o)$, $a_o = a|_{A_o}$, j (respt. $\bar{j}$) l'injection canonique de P_o (respt. A_o) dans P (respt. A). D'après le lemme, P_o est une QF-variété d'atlas étale (A_o, a_o, P_o) et j est une QF-immersion bien stricte d'atlas étale

$$\begin{array}{ccc} A_o & \xrightarrow{\bar{j}} & A \\ \downarrow{\scriptstyle a_o} & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ P_o & \xrightarrow{j} & P \end{array}$$

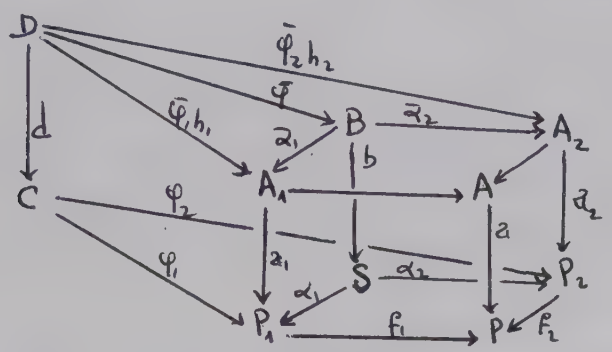
ψ_o est une QF-submersion (et même une submersion car P_o est une variété réduite à un point). D'autre part, d'après la commutativité du diagramme (XXII), $\bar{f}_1 \bar{\varphi}_1$ et $\bar{f}_2 \bar{\varphi}_2$ sont à valeurs dans A_o qui est une sous-variété immergée de A, donc induisent des applications différentiables respectives $\bar{\varphi}_1 : D_1 \longrightarrow A_o$ et $\bar{\varphi}_2 : D_2 \longrightarrow A_o$. A_o étant une variété discrète, $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\varphi}_2$ sont des submersions qui relèvent la QF-submersion ψ_o. D'après la proposition 10, il existe une submersion : $\bar{\psi} : D \longrightarrow A_o$ et des étalements $h_1 : D \longrightarrow D_1$, $h_2 : D \longrightarrow D_2$ rendant commutatif dans $\mathcal{QF}$ le diagramme :

(XXIII)



Des diagrammes (XXII) et (XXIII), nous déduisons le suivant, qui est commutatif dans $\mathcal{QF}$, (dans lequel $\bar{\varphi}$ est justifié comme ci-après) :

(XXIV)



on a les égalités : $\bar{j}\,\bar{\psi}_1\,h_1 = \bar{f}_1\bar{\varphi}_1\,h_1 = \bar{j}\,\bar{\psi}_2\,h_2 = \bar{f}_2\bar{\varphi}_2\,h_2$; le carré (B, A_1, A, A_2) étant cartésien dans $\mathcal{D}$ par construction, il existe une unique application différentiable $\bar{\varphi} : D \longrightarrow B$ telle que

$$\bar{\alpha}_1\,\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1\,h_1, \text{ et } \bar{\alpha}_2\,\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_2\,h_2$$

Montrons maintenant $(PC)_4$. Soit $z \in C$, d étant un étalement surjectif, il existe $y \in D$, un voisinage ouvert U de y tels que $d(y) = z$ et $d|_U$ soit un difféomorphisme sur un voisinage ouvert Ω de z ;

$\varphi = b\,\bar{\varphi}\,(d|_U)^{-1} : \Omega \longrightarrow S$ est alors un QF-morphisme qui répond à la question ; d'où $(PC)_4$.

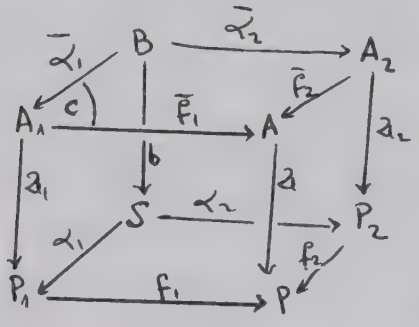
Remarque 10

La régularité de P_1 et P_2 n'ont intervenu que dans la preuve de l'unicité de la factorisation dans $(PC)_3$.

3°) Montrons que si P est régulière, il en est de même de S.

De la construction de S, nous avons le diagramme commutatif dans $\mathcal{Q}\mathcal{F}$:

(XXV)



Soient N_o un point de B, φ un représentant d'un germe de quasi-holonomie de B en N_o. On peut supposer que $\varphi(N_o) = N_o$. Montrons que φ est inversible en N_o.

(i) Ecriture locale et jacobienne de φ

Les submersions $\bar{f}_1$ et $\bar{f}_2$ s'écrivent localement à des difféomorphismes près et respectivement en $\bar{f}_1(N_o)$ et $\bar{f}_2(N_o)$:

$$M_1 \times M \xrightarrow{Pr_2} M$$

$$M \times M_2 \xrightarrow{Pr_1} M$$

où M est un ouvert de A. Donc $(M_1 \times M) \underset{M}{\times} (M \times M_2)$ qui s'identifie à $M_1 \times M \times M_2$ est un voisinage ouvert de N_o car le carré (c) est cartésien par construction ; ce carré "s'écrit" donc localement :

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times M \times M_2 & \xrightarrow{Pr_2 \times Pr_3} & M \times M_2 \\ \downarrow{\scriptstyle Pr_1 \times Pr_2} & & \downarrow{\scriptstyle Pr_1} \\ M_1 \times M & \xrightarrow{pr_2} & M \end{array}$$

D'autre part comme $\varphi(N_o) = N_o$, on peut supposer que φ est définie et à valeurs dans $M_1 \times M \times M_2$. d'où l'écriture locale de φ :

$$M_1 \times M \times M_2 \longrightarrow M_1 \times M \times M_2$$

$$(x_1, x, x_2) \longrightarrow (U_1(x_1, x, x_2), U(x_1, x, x_2), U_2(x_1, x, x_2))$$

La matrice jacobienne ϕ de φ en $N_o = (x_1^o, x^o, x_2^o)$ est donc de la forme

$$\phi = \left(\begin{array}{c|c|c} \partial U_1/\partial x_1 & \partial U_1/\partial x & \partial U_1/\partial x_2 \\ \hline \partial U/\partial x_1 & \partial U/\partial x & \partial U/\partial x_2 \\ \hline \partial U_2/\partial x_1 & \partial U_2/\partial x & \partial U_2/\partial x_2 \end{array} \right)$$

Remarquons aussi que puisque φ représente un germe de quasi-holonomie de $B = A_1 \underset{A}{\times} A_2$, d'après la commutativité du diagramme (XXV), (x_1, x) et $(U_1(x_1, x, x_2), U(\quad))$ ont même projection dans P_1 ;

de même (x, x_2) et (U, U_2) ont même projection dans P_2, x et U ont même projection dans P quel que soit $(x_1, x, x_2) \in M_1 \times M \times M_2$.

(ii) Les sous-matrices $\partial U/\partial x_i$, $\partial U_i/\partial x_j$, $i, j, = 1, 2, i \neq j$ sont nulles :

Considérons l'application partielle :

$$\varphi_{x^o, x^o_2} : M_1 \longrightarrow M \times M_2$$

$$x_1 \longrightarrow (U(x_1, x^o, x^o_2), U_2(x_1, x^o, x^o_2))$$

d'après la remarque précédente, $\varphi_{(x^o, x^o_2)}$ est à valeurs dans la même fibre que $(x^o, x^o_2) \in M \times M_2$, donc est localement constante; par suite

$$\partial U/\partial x_1 = \partial U_2/\partial x_1 = 0$$

On montrerait de même que

$$\partial U/\partial x_2 = \partial U_1/\partial x_2 = 0$$

(iii) Les sous-matrices $\begin{pmatrix} \partial U_1/\partial x_1 & \partial U_1/\partial x \\ 0 & \partial U/\partial x \end{pmatrix}$,

$(\partial U/\partial x)$ et $\begin{pmatrix} \partial U/\partial x & 0 \\ \partial U_2/\partial x & \partial U_2/\partial x_2 \end{pmatrix}$ sont inversibles :

Considérons l'application partielle

$$\varphi_{x_2^\circ} \quad : \quad M_1 \times M \longrightarrow M_1 \times M$$

$$(x_1, x) \longrightarrow (U_1(x_1, x, x_2^\circ), U(x_1, x, x_2^\circ))$$

d'après la remarque précédente, $\varphi_{x_2^\circ}$ représente un germe de quasi-holonomie de A_1 en (x_1°, x°) ; donc, puisque P_1 est régulier, $\varphi_{x_2^\circ}$ est inversible ; par suite

$$\begin{pmatrix} \partial U_1/\partial x_1 & \partial U_1/\partial x \\ 0 & \partial U/\partial x \end{pmatrix} \quad \text{est inversible,}$$

donc aussi $(\partial U_1/\partial x_1)$ et $(\partial U/\partial x)$ car

$$\det \begin{pmatrix} \partial U_1/\partial x_1 & \partial U_1/\partial x \\ 0 & \partial U/\partial x \end{pmatrix} = \det (\partial U_1/\partial x_1) \times \det (\partial U/\partial x)$$

De même $(\partial U_2/\partial x_2)$ et

$$\begin{pmatrix} \partial U/\partial x & 0 \\ \partial U_2/\partial x & \partial U_2/\partial x \end{pmatrix} \quad \text{sont inversibles.}$$

En resumé la matrice jacobienne de φ est de la forme

$$\phi = \left(\begin{array}{c|c|c} C & * & 0 \\ \hline 0 & D & \end{array}\right)$$

où C et D sont des matrices inversibles. Il en est donc de même de ϕ. Par suite φ est inversible en $N_o = (x_1^o, x^o, x_2^o)$.

Le résultat suivant, grâce à l'identification de la catégorie $\mathcal{D}$ à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{QF}$, prouve que la notion de pseudo-carré de Godement est une extension de la notion de QF-carré introduite en [II, 3, a]

Proposition 16

Tout QF-carré se relève canoniquement dans $\mathcal{QF}$, en un carré pseudo-cartésien (donc un pseudo - carré de Godement).

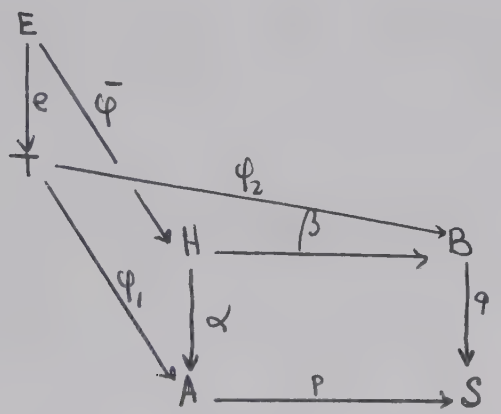
Démonstration

Soit

(c)
$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\beta} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ A & \xrightarrow{p} & S \end{array}$$

un QF-carré. On sait [II, 3, théorème 3] que S possède

un structure de QF-variété d'atlas (A, p, S). Il suffit donc de montrer que H est le produit pseudo-fibré de A et B (considéré comme QF-variétés) ; il faut et il suffit alors que l'on vérifie la propriété $(PC)_3$ pour le carré (c). Soient alors $\varphi_1 : T \longrightarrow A$ et $\varphi_2 : T \longrightarrow B$ deux QF-submersions telles que $p\,\varphi_1 = q\,\varphi_2$, (E, e, T) un atlas étale de T ; $\varphi_1 e : E \longrightarrow A$ est une QF-submersion de E dans A, donc une submersion car E et A sont des variétés. De même $\varphi_2 e : E \longrightarrow B$ est une submersion. Comme $p\,\varphi_1 e = q\,\varphi_2 e$, on peut appliquer la propriété $(QF)_3$ au QF-carré (c) et au couple de submersions $\varphi_1 e$ et $\varphi_2 e$; d'où l'existence d'une unique application différentiable $\bar{\varphi} : E \longrightarrow H$ rendant commutatif dans $\mathcal{QF}$ le diagramme suivant :



Montrons que si x, y $\in$ E et si e(x) = e(y), alors $\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}(y)$: en effet il existe alors un isomorphisme transversal 6 de (E, e, T) défini sur un voisinage ouvert V de x et tel que

$\sigma(x) = y$. D'après la commutativité du diagramme ci-dessus, on a, pour tout $t \in V$:

$$\alpha\bar{\varphi}\,\sigma(t) = \varphi_1 \, e\,\sigma(t) = \varphi_1\, e(t) = \alpha\,\bar{\varphi}\big|_V(t)$$

de même $\beta\bar{\varphi}\,\sigma(t) = \varphi_2\, e\,\sigma(t) = \varphi_2\, e(t) = \beta\,\bar{\varphi}\big|_V(t)$

Les submersions restrictions de $\varphi_1 e$ et $\varphi_2 e$ à l'ouvert V vérifient les hypothèses de $(QF)_3$ et admettent pour factorisation à travers H, $\bar{\varphi}\sigma$ et $\bar{\varphi}\big|_V$. Donc par unicité de factorisation $\bar{\varphi}\sigma = \bar{\varphi}\big|_V$. Par suite $\bar{\varphi}\,\sigma(x) = \bar{\varphi}\,(y) = \bar{\varphi}\big|_V(x) = \bar{\varphi}(x)$.

On peut alors définir une application φ de T dans H en posant :

$$\varphi(z) = \bar{\varphi}(x), \text{ où } x \in e^{-1}(z).$$

Il est évident que $\varphi e = \bar{\varphi}$, donc φ est un QF-morphisme (de relèvement $\bar{\varphi}$).

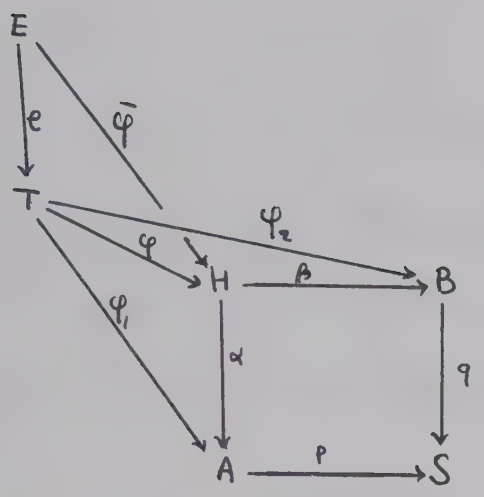
Vérifions que $\alpha\varphi = \varphi_1$: soit $z \in T$; il existe $x \in e^{-1}(z)$; $\alpha\varphi(z) = \alpha\,\bar{\varphi}(x) = \varphi_1\, e\,(x) = \varphi_1(z)$. De même $\beta\varphi = \varphi_2$.

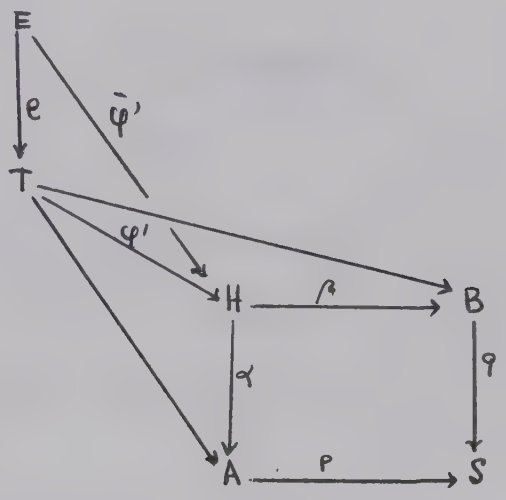
<u>Unicité de φ</u> : Soient φ et φ' deux QF-morphismes de T dans H tels que

$$\alpha\varphi = \alpha\varphi' = \varphi_1 \quad , \quad \beta\varphi = \beta\varphi' = \varphi_2 .$$

On peut supposer que φ et φ' admettent des relèvement

respectifs $\bar{\varphi}$ et $\bar{\varphi}'$ de même atlas source (E, e, T) et de but H [III, 1, prop. 1]. Nous avons alors les diagrammes commutatifs dans $\mathfrak{F}$ suivants :





Mais alors les submersions $\varphi_1 e$ et $\varphi_2 e$ admettent $\varphi' e = \bar{\varphi}'$ et $\varphi e = \bar{\varphi}$ comme factorisation à travers H. Par unicité de factorisation on a nécessairement $\varphi' e = \bar{\varphi}' = \bar{\varphi} = \varphi e$. Puisque e est une application surjective, on a $\varphi = \varphi'$.

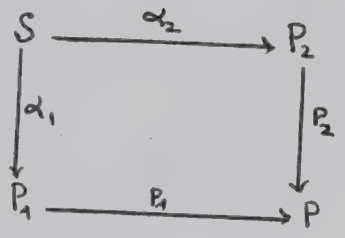
b) Un théorème " de Godement "

Nous allons maintenant établir une réciproque partielle du thérème 2 donnant une propriété de fermeture de la catégorie $\mathfrak{QF}$ analogue au théorème de Godement dans $\mathcal{D}$.

Théorème 3

Soit

(1)

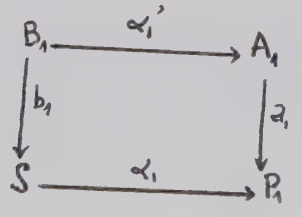


un pseudo-carré de Godement. Si α_1 et α_2 sont QF-étales, alors il existe sur P une unique structure de QF-variété telle que le carré (1) soit pseudo-cartésien. De plus p_1 et p_2 sont QF-étales.

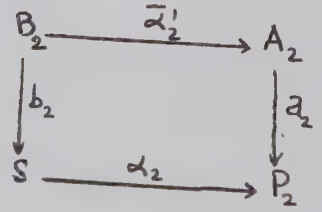
Démonstration

(i) Construction préliminaire : α_1 et α_2 étant QF-étales, admettent [III, 2, prop. 6] des atlas surcartésiens respectifs

(I)



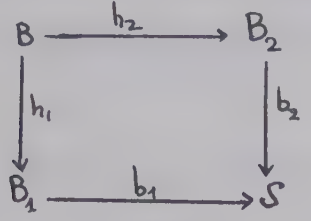
et (I)'



où $\bar{\alpha}_1'$ et $\bar{\alpha}_2'$ sont des étalements. (B_1, b_1, S) et (B_2, b_2, S)

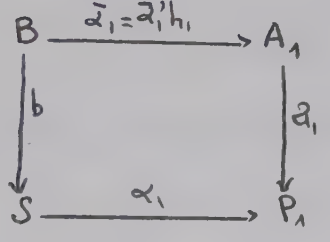
étant des atlas étales et équivalents de S, il existe [II, 3, théorème 3] un QF-carré

(II)



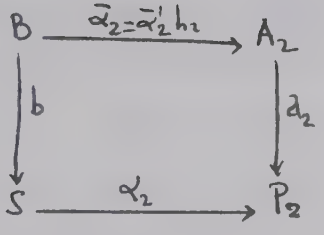
où h_1 et h_2 sont des étalements. Donc [II, 1, prop. 3] (B, $b_1 h_1 = b_2 h_2 = b$, S) est un atlas étale de S. On en déduit l'atlas suivant de α_1 qui est encore surcartésien :

(III)



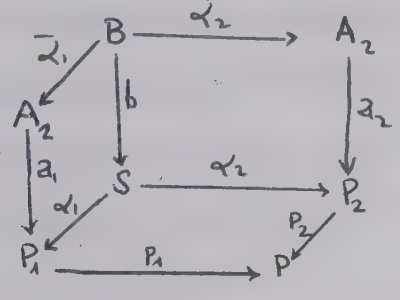
de même pour α_2 :

(III)'



D'où le diagramme commutatif dans $\mathcal{E}$:

(IV)



où $\bar{\alpha}_1$ et $\bar{\alpha}_2$ sont des étalements.

(ii) La projection canonique de B dans $A_1 \underset{P}{\times} A_2$ est surjective :

soit en effet $(y_1, y_2) \in A_1 \underset{P}{\times} A_2$, c'est-à-dire que

$$p_1 (a_1 (y_1)) = p_2 (a_2 (y_2))$$

d'après la condition $(PC)_1$, il existe $s \in S$ tel que $(\alpha_1, \alpha_2)(s) = (a_1(y_1), a_2(y_2))$. L'atlas (I) (resp. (I)') étant surcartésien, il existe $x_1 \in B_1$ (resp $x_2 \in B_2$) tel que $(b_1, \bar{\alpha}'_1)(x_1) = (s, y_1)$ (resp. $(b_2, \bar{\alpha}'_2)(x_2) = (s, y_2)$). D'autre part comme le diagramme (II) est un QF-carré, et d'après $(QF)_1$, il existe $x \in B$ tel que $(h_1, h_2)(x) = (x_1, x_2)$, car $b_1(x_1) = b_2(x_2) = s$. Par suite

$(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)(x) = (\bar{\alpha}'_1 h_1(x), \bar{\alpha}'_2 h_2(x)) = (\bar{\alpha}'_1(x_1), \bar{\alpha}'_2(x_2)) =$

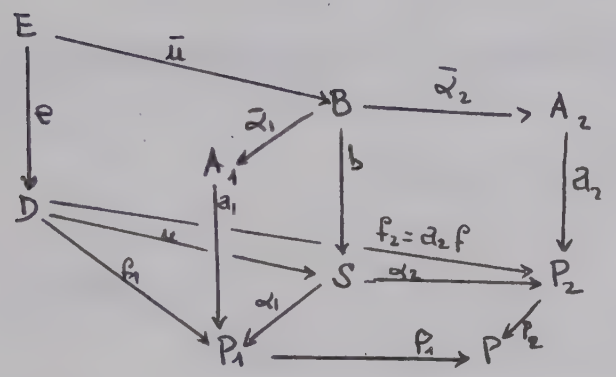
(y_1, y_2).

(iii) Montrons maintenant que $(A_2, p_2 a_2, P)$ est un QF-atlas étale de P ; il suffit de vérifier les conditions $(A_1)'$ et $(A_2)'$ de [II, 1, prop. 1].

- Vérifions $(A_1)'$: soit alors $f : D \longrightarrow A_2$ une application différentiable telle que $f_2 = a_2 f$ soit constante : posons $(a_2 f)(D) = \lambda \in P$. Comme $p_1 : P_1 \longrightarrow P$ est surjective, il existe $y_1 \in P_1$ tel que $p_1(y_1) = \lambda$. Notons f_1 le QF-morphisme constant de D vers P_1 défini par $f_1(x) = y_1$ pour tout $x \in D$. Le couple de QF-morphismes $f_1 : D \longrightarrow P_1$ et $f_2 : D \longrightarrow P_2$

vérifient les hypothèses de $(PC)_4$ pour le carré (1); donc quel que soit $z \in D$, il existe un voisinage ouvert D_o de z, un QF-morphisme $u : D_o \longrightarrow S$ rendant commutatif dans $\mathcal{C}$ le diagramme suivant, dans lequel $\bar{u}$ est un relèvement de u :

(V)



Mais $a_1^{-1}(y_1)$ est une sous-variété immergée discrète de A_1, donc [I, 2, prop. 4 et corol. prop. 5], $\bar{\alpha}_1^{-1}(a_1^{-1}(y_1)) = (\alpha_1 b)^{-1}(y_1)$ est une sous-variété immergée discrète de B, car $\bar{\alpha}_1$ est un étalement.

D'après la commutativité du diagramme (V), $\bar{u}$ est à valeurs dans $(\alpha_1 b)^{-1}(y_1)$, donc est différentiable comme à valeurs dans la variété $(\alpha_1 b)^{-1}(y_1)$; par suite $\bar{u}$ est localement constante. On en déduit, comme e est un étalement, que u est aussi localement constante, donc aussi $f_2 = \alpha_2 u = a_2 f$. Soit alors Ω un voisinage de z sur lequel $f_2 = a_2 f$ est constante et posons $\mu = f_2(\Omega) = a_2 f(\Omega)$. Alors $f|_\Omega$ est à valeurs dans la sous-variété immergée et discrète $a_2^{-1}(\mu)$, donc $f|_\Omega$ est localement constante .

Par suite f est localement constante.

- Vérifions maintenant $(A_2)'$: considérons alors $(x_2, x'_2) \in A_2 \times A_2$ tel que $p_2\, a_2(x_2) = p_2 a_2(x'_2) \in P$. La projection $p_1\, a_1 : A_1 \longrightarrow P$ étant surjective, il existe $x_1 \in A_1$ tel que $p_1\, a_1\, (x_1) = p_2\, a_2(x_2) = p_2 a_2(x'_2)$.

D'après (ii) ci-dessus, il existe $x \in B$, $x' \in B$ tels que

$$(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)\ (x) = (x_1, x_2)$$

$$(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)\ (x') = (x_1, x'_2)$$

L'étalement $\bar{\alpha}_1$ induit un difféomorphisme σ_1 (respt. σ_2) d'un voisinage ouvert W (respt. W') de $x \in B$ (respt. $x' \in B$) sur un voisinage ouvert de x_1 tel que $\sigma_1(x) = x_1$ (respt. $\sigma_2\ (x') = x_1$). De même $\bar{\alpha}_2$ induit un difféomorphisme σ_3 (respt. σ_4) d'un voisinage ouvert V (respt. V') de x (respt. x') sur un voisinage ouvert de x_2 (respt. x'_2) tel que $\sigma_3(x) = x_2$ (respt. $\sigma_4(x') = x'_2$). Les σ_i, par construction, sont tous compatibles avec les projections dans P. En Supposant V = W et V' = W', le difféomorphisme $\sigma_4\, \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_3^{-1}$ est compatible avec la projection sur P et transporte x_2 en x'_2 : c'est donc un isomorphisme transverse ; d'où $(A_2)'$.

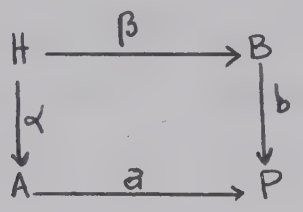
On montrerait de même que (A_1, p_1, P) est un autre atlas de P, qui est équivalent en premier d'après [II, 3, th. 3, corol. 1]

Il est évident que p_1 (respt. p_2) est un QF-étalement car il admet pour relèvement id_{A_1} (respt. id_{A_2}).

Il est immédiat que le carré (1) est un carré pseudo-cartésien.

Remarque 11

Dans le théorème 3, P peut ne pas être régulière, même si P_1, P_2 et S le sont comme on le voit dans le cas où le carré (1) est un QF-carré



et P une QF-variété non régulière et on sait [III, 4, ex. 5] que A, B et H étant des variétés, sont des QF-variétés régulières.

Ajouté sur épreuve

Après la mise en page de ce texte,

1°) Molino nous a signalé le travail de Van Est ([BV] et [VE]) sur les " manifold shemes ". A première vue le travail de Van-Est suscite quelques commentaires :

(i) Les classes d'équivalence obtenues ne sont pas des sous-variétés immergées alors qu'elles le sont dans la définition de QF-variétés.

(ii) Le foncteur d'oubli des " manifold shemes " n'est pas fidèle et c'est d'ailleurs l'une des raisons pour lesquelles nous n'avions pas retenu cette définition.

(iii) La structure considérée par Van Est contient la donnée d'un pseudo-groupe de transformation alors que, pour un QF-atlas, le pseudo-groupe découle de la seule donnée de la relation d'équivalence.

(iv) Mais la notion de morphismes est à rapprocher de celle de QF-morphismes holonomes [III, 3, déf. 10] . Il serait intéressant de confronter les deux théories.

2°) Il faut mentionner pour mémoire que les V-variétés de Satake sont un cas particulier de QF-variété.

B I B L I O G R A P H I E

-:-:-:-:-:-:-:-:-

Barre, R.

[BA] Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 23, 1973, p. 223.

Bourbaki, N.

[BO_1] Topologie Générale, Herman, Paris.

[BO_2] Variétés différentielles et analytiques, Hermann, Paris, 1971.

Chevalley, C.

[C] Theory of Lie Groups, Princeton Uni. Press, 1946.

Ehresmann, C.

[E_1] Catégories topologiques et catégories différentiables, Coll. Bruxelles, 1958.

[E_2] Structures feuilletées, Proc. 5th. Canadian Math. Cong., p. 109.

Godbillon

[G_1] C.R.A.S., 1967, t· 264, p. 1050.

[G_2] Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 17, 1967, p. 219.

Haefliger

[H_1] Structures feuilletées et cohomologie... Com. Math. Helv., 32, 1958, p. 248.

[H_2] Variétés feuilletées, Ann. Scuola Norm. Sup. Pis, 16, 1962, p. 367.

Lawson, H. B.

[LA] Foliations, Bull. of Ann. Math. Soc., vol. 80 1974, p. 369.

Molino, P.

[M] Sur la géométrie transverse des feuilletages, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 25, 1975, P. 279.

Pradines, J.

[P_1] Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables, C.R.A.S., Paris, 263, 1966, p. 907.

[P_2] Calcul différentiel dans la catégorie des groupoïdes différentiables, C.R.A.S., 264, 1967, P. 245.

[P_3] Géométrie différentielle au-dessus d'un groupoïde différentiable, C.R.A.S., 266, 1968, p. 1194.

[P_4] Troisième théorème de Lie pour Des groupoïdes différentiables, Atti. Con. Int. Geom. Diff., Bologna, 1967.

[P_5] Building categories in which a Godment's theorem is available, Coll. Catég., Amiens, 1975.

[P_6] Journée de Géométrie différentielle, Univ. Paris VII, juin 1977.

[P_7] Sur une classe remarquable de relations d'équivalence sur les variétés différentiables, Reu. An. de Mat. Jaca, 1977.

[P_8] C.R.A.S., 286 série A p. 255.

[P_9] Un feuilletage sans holonomie transversale dont le quotient n'est pas une Q-variété, à paraître C.R.A.S., Paris.

Pradines, J. ; Wouafo Kamga, J.

[PW] Relations d'équivalence transversalement différentiables, C.R.A.S., 283, 1976, p. 25.

Serre, J.P.

[S] Lie Algebra and Lie Groups, Harvard, L964.

Ajouté sur épreuve

Bouma, L.G. ; Van Est, W.T.

[BV] Manifold Schemes and foliations on the 2 - torus and Klein Bottle, Proc. Kon. Ned. Akad. V. Wet. A, 81, 1978.

Van Est, W.T.

[VE] Fundametal groups of manifolds Shemes. Symposium on Topology, Amsterdam, oct. 31. Nov. 2, 1978.

Pradines, J. Wouafo Kamga, J.

[PW]' La catégorie des QF-variétés, à paraître C.R.A.S. Paris.